PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara del Triennio

4 dicembre 1996

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

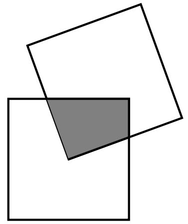
Nome ____________________ *Cognome* ____________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Dati cinque interi consecutivi, cosa si può dire della cifra delle unità del loro prodotto?
(A) può essere qualunque cifra
(B) può essere qualunque cifra pari
(C) può essere 0 oppure 5
(D) è sempre 0
(E) nessuna delle precedenti.

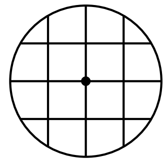
2) Un cane che sta in un punto A insegue una lepre che si trova, all'istante iniziale, 30 m avanti ad A. Il cane galoppa con falcate di 2 m, mentre la lepre fugge compiendo falcate di 1 m. Ogni 2 falcate del cane, la lepre ne compie 3. Dove il cane raggiungerà la lepre?
(A) A 30 m dal punto A
(B) a 60 m dal punto A
(C) a 120 m dal punto A
(D) a 600 m dal punto A
(E) il cane non raggiungerà mai la lepre.

3) Sono dati due quadrati di lato 10 cm, uno dei quali ha un vertice nel centro dell'altro. L'area della parte comune ai due quadrati misura
(A) 20 cm^2 **(B)** 25 cm^2 **(C)** 40 cm^2 **(D)** 50 cm^2
(E) dipende dalla posizione.



4) Lunedì ho acquistato delle azioni che martedì hanno perso il 10% del loro valore e mercoledì hanno guadagnato il 10% rispetto a martedì. Immediatamente ho venduto le mie azioni. Rispetto al prezzo iniziale il prezzo finale è
(A) lo stesso **(B)** diminuito dell'1% **(C)** aumentato dell'1%
(D) diminuito del 10% **(E)** aumentato del 10%.

5) Un oblò circolare di raggio 20 cm viene grigliato con delle sbarre in modo che i quattro quadrati al centro siano di lato 10 cm. La lunghezza complessiva delle sbarre è
(A) $80\sqrt{3}$ cm **(B)** $80(\sqrt{2}+1)$ cm **(C)** 200 cm
(D) $80(\sqrt{3}+1)$ cm **(E)** 210 cm.



6) Quanto vale il quadrato del quadrato del quadrato di 8?
(A) 2^8 **(B)** 8^4 **(C)** 8^6 **(D)** 8^8 **(E)** 2^{64}.

7) La somma dei reciproci delle radici di $ax^2+bx+c=0$ (ove $a,b,c\neq 0$) è
(A) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **(B)** $\frac{b}{c}$ **(C)** $-\frac{c}{b}$ **(D)** $-\frac{a}{b}$ **(E)** $-\frac{b}{c}$.

8) Vicino ad una fonte vi è una cisterna di capacità superiore a 30 ettolitri, inizialmente vuota. Sono disponibili solo due recipienti calibrati, uno da 15 ed uno da 21 litri, con i quali è possibile aggiungere e togliere acqua dalla cisterna. Quale dei seguenti volumi di acqua non posso mettere esattamente nella cisterna?
(A) 3 litri **(B)** 5 litri **(C)** 6 litri **(D)** 645 litri
(E) posso ottenere tutti i precedenti.

9) Antonio è nato il 1° marzo di un anno che aveva 53 sabati e 53 domeniche. In che giorno della settimana è nato?
(A) lunedì **(B)** mercoledì **(C)** venerdì
(D) in un giorno diverso dai precedenti **(E)** non si può determinare con certezza.

10) Qual è la probabilità che il primo numero estratto sulla ruota di Firenze sia minore del primo numero estratto sulla ruota di Napoli? (Ricordiamo che al lotto si estraggono i numeri da 1 al 90).
(A) $\frac{44}{90}$ **(B)** $\frac{88}{179}$ **(C)** $\frac{44}{89}$ **(D)** $\frac{89}{180}$ **(E)** $\frac{1}{2}$.

11) Qual è la cifra delle unità di $1^2+2^2+3^2+\ldots+1996^2$?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

12) Sia D il dominio del piano cartesiano determinato dal sistema di disequazioni a fianco. Qual è l'area di D?
(A) $\sqrt{2}\pi$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2}$ **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$ **(E)** $4-\pi$.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 1 \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \ge 1 \end{cases}$$

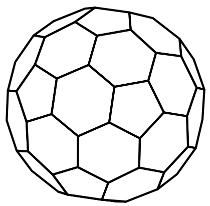
13) Sia X un insieme di numeri interi positivi. Si sa che X contiene almeno un elemento maggiore di 1 e che, tutte le volte che contiene un certo numero n, contiene anche tutti i numeri maggiori di n ad eccezione, eventualmente, dei multipli di n. Quale delle seguenti affermazioni è certamente corretta?
(A) X è un insieme finito
(B) l'insieme X e l'insieme degli interi positivi che non appartengono ad X sono entrambi infiniti
(C) X contiene tutti i numeri primi
(D) esiste un numero m tale che X contiene tutti gli interi maggiori di m
(E) X è uguale all'insieme di tutti gli interi positivi.

14) Quanti angoli maggiori di 90° può avere un quadrilatero (non intrecciato)?
(A) Ne ha sempre almeno uno
(B) ne ha al più uno
(C) ne ha al più due
(D) ne ha al più tre
(E) può averne quattro.

15) Se si sviluppa la superficie laterale di un cilindro retto si ottiene un rettangolo le cui diagonali sono lunghe l e formano un angolo di 30° con la base del rettangolo. Il volume del cilindro è
(A) $\dfrac{1}{16}\dfrac{l^3}{\pi}$ **(B)** $\dfrac{3}{8}l^3$ **(C)** $\dfrac{3}{4}l^3$ **(D)** $\dfrac{3}{32}\dfrac{l^3}{\pi}$
(E) le risposte precedenti sono tutte sbagliate.

16) Un mio amico ha scritto un numero segreto di quattro cifre usando una sola volta le cifre 1, 2, 3 e 4. Sapendo che nessuna cifra occupa il posto che corrisponde al proprio valore (cioè la prima cifra non è 1, la seconda non è 2, e così via), quale probabilità ho di indovinare il numero al primo tentativo?
(A) $\dfrac{1}{24}$ **(B)** $\dfrac{1}{9}$ **(C)** $\dfrac{1}{8}$ **(D)** $\dfrac{1}{81}$ **(E)** $\dfrac{1}{6}$.

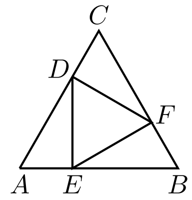
17) Un pallone di cuoio è ottenuto cucendo 20 pezzi di cuoio a forma esagonale e 12 pezzi di cuoio a forma pentagonale. Una cucitura unisce i lati di due pezzi adiacenti. Allora il numero totale delle cuciture è
(A) 90 **(B)** 172 **(C)** 176 **(D)** 180
(E) i dati del problema sono insufficienti.



18) Qual è la somma dei numeri contenuti nella tabella a fianco?
(A) $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **(B)** $n+\dfrac{n(n+1)^2}{2}$
(C) n^3+n^2+n+1 **(D)** $n(2n-1)(n+1)$
(E) n^3.

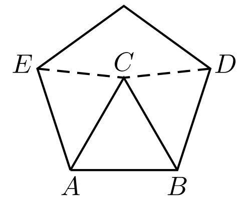
1	2	3	$\cdots$	n
2	3	4	$\cdots$	$n+1$
3	4	5	$\cdots$	$n+2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n-1$

19) Sia ABC un triangolo equilatero e DEF un altro triangolo equilatero in esso inscritto con AB perpendicolare a ED. Il rapporto fra le aree di ABC e di DEF è
(A) $\sqrt{3}$ **(B)** 2 **(C)** $\dfrac{5}{2}$ **(D)** 3 **(E)** $3\sqrt{2}$.



20) Quante cifre ha il numero $(123456789)^6$?
(A) 16 **(B)** 48 **(C)** 49 **(D)** 50 **(E)** 54.

21) Nel pentagono regolare disegnato a fianco, il triangolo ABC è equilatero. Quanto vale l'angolo convesso $E\widehat{C}D$?
(A) 120° **(B)** 144° **(C)** 150° **(D)** 168° **(E)** 170°.

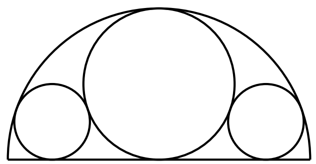


22) Ad un torneo di golf partecipano 256 concorrenti. Il torneo prevede che ad ogni turno partecipino 4 concorrenti: il vincitore passa al turno successivo mentre gli altri 3 concorrenti vengono eliminati. Quanti turni sono necessari per determinare il vincitore assoluto del torneo?
(A) 16 **(B)** 64 **(C)** 65 **(D)** 85 **(E)** 128.

23) Consideriamo le frazioni con numeratore e denominatore positivi. Quale dei seguenti insiemi è finito?
(A) l'insieme delle frazioni minori di 100 con numeratore minore di 100
(B) l'insieme delle frazioni maggiori di 100 con denominatore maggiore di 100
(C) l'insieme delle frazioni minori di 100 con denominatore minore di 100
(D) l'insieme delle frazioni minori di 100 con numeratore maggiore di 100
(E) l'insieme delle frazioni maggiori di 100 con denominatore minore di 100.

24) Ho a disposizione cinque cifre uguali a 1 ed una cifra uguale a 2. Usando tutte o alcune di queste cifre, quanti numeri diversi posso costruire?
(A) 15 **(B)** 21 **(C)** 24 **(D)** 26 **(E)** 27.

25) Da un semicerchio di cartone di raggio 10 cm si ritaglia un cerchio di diametro massimo. Dai due tronconi rimasti si ritagliano due cerchi di diametro massimo. Qual è la percentuale di cartoncino sprecata?
(A) 10% **(B)** 20% **(C)** 25% **(D)** 30% **(E)** 50%.



PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara del Triennio

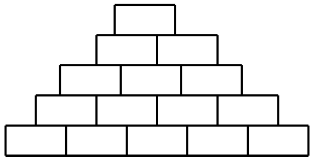
3 dicembre 1997

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

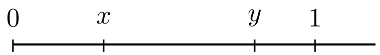
Nome ______________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Nella figura a fianco i rettangoli (tutti uguali) hanno altezza a e base b. Il perimetro della figura
(A) è $15a+15b$ **(B)** è $10a+10b$ **(C)** è $15a+30b$
(D) è $30a+30b$ **(E)** nessuno dei precedenti.



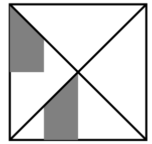
2) Dati due reali x e y tali che $0 < x < y < 1$, in quale intervallo si trova $x\sqrt{y}$?
(A) Fra 0 e x **(B)** fra x e y **(C)** fra y e 1
(D) oltre 1 **(E)** dipende dai valori di x e y.



3) Data una funzione tale che $f(x+1) = \dfrac{2f(x)+1}{2}$ e tale che $f(2) = 2$, quanto vale $f(1)$?
(A) 0 **(B)** 1/2 **(C)** 1 **(D)** 3/2 **(E)** 2.

4) Sulla lavagna si trova scritto il numero 1. La sola mossa permessa è cancellare il numero scritto sulla lavagna e sostituirlo o con il suo doppio o con il suo quadrato. Qual è il numero più grande che si può ottenere in 8 mosse?
(A) 2^8 **(B)** 4^7 **(C)** 8^8 **(D)** 2^{64} **(E)** 2^{128}.

5) Qual è la percentuale del quadrato ombreggiata in figura?
(A) 12,5% **(B)** 16,66% **(C)** 18,75% **(D)** 20% **(E)** 25%.



6) Per tagliare un anello di catena occorre un minuto, e per saldarlo di nuovo ne occorrono 5. Disponendo di 10 anelli concatenati a due a due, quanti minuti occorrono (al minimo) per formare una catena aperta di 10 anelli?
(A) 30 **(B)** 26 **(C)** 24 **(D)** 18 **(E)** 12.

7) Quale dei seguenti numeri è il più piccolo?
(A) 0,0000001 **(B)** 9^{-8} **(C)** $(0,1)^{0,1}$ **(D)** $\sqrt{0,00001}$ **(E)** $(0,0001)^2$.

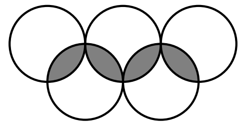
8) Le superfici totali di due cubi sono l'una doppia dell'altra. Qual è il rapporto fra i volumi dei due cubi?
(A) 2 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** $\sqrt[3]{2}$ **(E)** 4.

9) Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo. Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?
(A) Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo
(B) se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio
(C) se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio
(D) se la sera non ho fame, allora non mangio troppo
(E) se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio.

10) In un piano cartesiano sono dati i punti seguenti: $A = (0,15)$; $B = (20,0)$; $C = (0,0)$. Qual è la larghezza minima di una *striscia rettilinea* che contiene tutti e tre i punti? [Chiamiamo *striscia rettilinea* la porzione di piano compresa tra due rette parallele, comprese le due rette.]
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 20.

11) Se $2^x = 4^{y+1}$ e $27^y = 3^{x+1}$, quanto vale $x+y$?
(A) -3 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 11
(E) non esistono coppie di numeri (x,y) che verificano le condizioni date.

12) Determinare l'area della figura tratteggiata, sapendo che ogni circonferenza ha raggio 1 cm.
(A) π cm^2 **(B)** $(\pi-2)$ cm^2 **(C)** $2(\pi-1)$ cm^2
(D) $2(\pi-2)$ cm^2 **(E)** $4(\pi-1)$ cm^2.

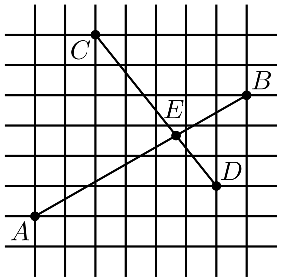


13) Un gioco consiste nel lancio ripetuto di un dado; i punteggi ottenuti ad ogni lancio vengono sommati al totale precedente e un giocatore vince tanti gettoni qual è il suo punteggio, ma non vince nulla se il suo punteggio supera 10. Un giocatore ha già un punteggio di sei. Gli conviene tirare un altro dado (sommando a sei il punteggio ottenuto) o ritirarsi dal gioco vincendo i sei gettoni?
(A) Conviene tirare: infatti in quattro casi si guadagna, in due casi soli si perde
(B) conviene fermarsi: infatti se si perde si perdono i sei gettoni, e se si vince se ne guadagnano al massimo quattro
(C) conviene tirare, ma con una motivazione differente da (A)
(D) conviene fermarsi, ma con una motivazione differente da (B)
(E) è solo questione di fortuna.

14) In una prima ci sono 3 ragazzi per ogni 2 ragazze. L'età media dei ragazzi è 14 anni e 2 mesi, quella delle ragazze 13 anni e 4 mesi. Qual è l'età media della classe?
(A) 13 anni e 6 mesi **(B)** 13 anni e 8 mesi **(C)** 13 anni e 10 mesi
(D) 14 anni **(E)** il risultato dipende dal numero di alunni della classe.

15) Quanto vale $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$?
(A) $\sqrt[20]{2}$ **(B)** $\sqrt[9]{2}$ **(C)** $\sqrt[4]{2}$ **(D)** $\sqrt[20]{2^9}$ **(E)** $\sqrt[20]{4}$.

16) Su un foglio di carta quadrettata sono disegnati, come in figura, i segmenti AB e CD. Detto E il loro punto di intersezione, quanto vale il rappporto fra la lunghezza di AE e la lunghezza di EB?
(A) Un numero razionale minore di 2
(B) un numero irrazionale minore di 2
(C) esattamente 2
(D) un numero razionale maggiore di 2
(E) un numero irrazionale maggiore di 2.



17) Qual è il numero intero che approssima meglio il numero $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$?
(A) 2 **(B)** 7 **(C)** 14 **(D)** 18 **(E)** 29.

18) Quanti venerdì 13 ci possono essere al massimo in un anno non bisestile?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** più di 4.

19) Nella somma $1+2+3+\cdots+100$, quanti segni $+$ devono essere cambiati in $-$ al minimo per poter ottenere 1997?
(A) Meno di 10 **(B)** tra 10 e 19 **(C)** tra 20 e 29 **(D)** più di 30
(E) non è possibile ottenere 1997.

20) Quante soluzioni intere positive ha l'equazione $x^2 - y^2 = 60$?
(A) Una **(B)** due **(C)** quattro **(D)** sei **(E)** infinite.

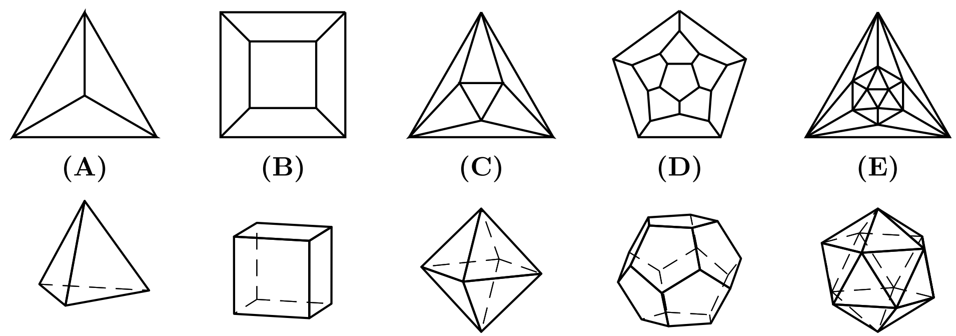
21) Nel triangolo ABC, il lato AB è lungo 1 cm e $A\widehat{C}B = 120°$. Sul lato AB si costruisce un triangolo equilatero ABD avente il vertice D dalla parte opposta di C rispetto alla retta AB. Detto G il baricentro del triangolo equilatero, dire quanto misura il segmento CG.
(A) $\sqrt{3}$ cm **(B)** $\sqrt{\frac{1}{3}}$ cm **(C)** $\sqrt{2}$ cm **(D)** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ cm
(E) i dati del problema sono insufficienti.

22) Le estrazioni del lotto vengono fatte indipendentemente in varie città. In ogni città vengono estratti 5 numeri distinti fra tutti i numeri compresi fra 1 e 90. Considerando le estrazioni che riguardano le 3 città di Milano, Roma e Napoli, qual è la probabilità che il numero 13 venga estratto in una e una sola di queste 3 città?
(A) $p < \frac{1}{18}$ **(B)** $\frac{1}{18} \leq p < \frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{9} \leq p < \frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{6} \leq p < \frac{1}{4}$ **(E)** $p \geq \frac{1}{4}$.

23) Per evitare ambiguità, conveniamo che, come usuale, un numero intero non possa cominciare per zero. Un numero intero positivo si dice palindromo se la sua espressione in base 10, letta in ordine inverso (da destra a sinistra) rappresenta ancora lo stesso numero. Detto p_5 il numero di palindromi di 5 cifre, p_6 il numero di palindromi di 6 cifre, p_7 il numero di palindromi di 7 cifre, quale delle seguenti affermazioni è corretta?
(A) $10p_5 = p_6$ e $10p_6 = p_7$ **(B)** $p_5 = p_6$ e $10p_6 = p_7$ **(C)** $10p_5 = p_6$ e $p_6 = p_7$
(D) $p_5 = p_6 = p_7$ **(E)** nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

24) Se a, b sono numeri reali positivi tali che $a+b=1$, il minimo valore possibile per il prodotto $(1+1/a)\cdot(1+1/b)$ è
(A) 16 **(B)** 9 **(C)** 4 **(D)** non c'è un valore minimo
(E) c'è un valore minimo, ma non è fra quelli citati.

25) In quale delle seguenti figure, che rappresentano gli spigoli dei 5 solidi platonici, è possibile percorrere tutti i lati disegnati senza tornare mai sui propri passi? (naturalmente è possibile passare più di una volta sullo stesso vertice).



PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

2 dicembre 1998

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ____________________ *Cognome* ____________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Se i numeri $0,3$; $0,\overline{3}$; $(0,\overline{3})^2$; $\frac{1}{0,3}$; $\frac{1}{0,\overline{3}}$ vengono messi in ordine crescente, il terzo numero è
(A) $0,3$ **(B)** $0,\overline{3}$ **(C)** $(0,\overline{3})^2$ **(D)** $\frac{1}{0,3}$ **(E)** $\frac{1}{0,\overline{3}}$.

2) La città del mistero dista 500 km da Topolinia e 1200 km da Paperopoli. Qual è il minimo valore possibile per la distanza tra Topolinia e Paperopoli?
(A) 500 km **(B)** 700 km **(C)** 1200 km **(D)** 1300 km **(E)** 1700 km.

3) Vi sono tre circonferenze tangenti esternamente a due a due. Esse hanno raggio uguale rispettivamente a 1, 2, 3. Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo che ha per vertici i tre centri delle circonferenze è allora uguale a
(A) 2 **(B)** 2,5 **(C)** 3 **(D)** π **(E)** non è possibile determinarlo.

4) Si considerino i due numeri $x = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ e $y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$. Si ha che
(A) $x = y$ **(B)** $x > y$ **(C)** $x < y$ **(D)** $x^2 - y^2 > 1$
(E) x e y non si possono confrontare.

5) Un poligono regolare ha n lati e $4n$ diagonali. Quanto vale n?
(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12.

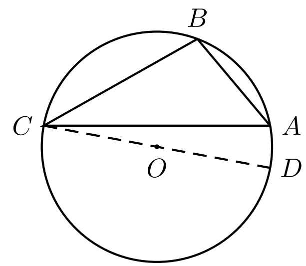
6) Sappiamo che una sola delle tre seguenti relazioni è vera: $x = 5$, $x > 5$, $x \leq 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?
(A) $x = 5$ **(B)** $x \neq 5$ **(C)** $x > 5$ **(D)** $x < 5$ **(E)** $x \geq 5$.

7) Due cerchi complanari di raggio 1 sono disposti in modo tale che la circonferenza di ognuno passa per il centro dell'altro. Qual è l'area dell'intersezione dei due cerchi?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}+\pi}{2}$ **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

8) I numeri 1, 2, 3 e 4 vengono estratti da un'urna in un ordine qualsiasi. Qual è la probabilità che i primi 3 numeri estratti siano in ordine crescente?
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{8}$ **(E)** $\frac{1}{12}$.

9) In una classe ci sono 30 alunni. La maestra li divide in 5 squadre di 6 alunni e poi organizza una gara a squadre. Alla fine della gara distribuisce caramelle a tutti gli alunni, facendo in modo che ogni componente dell'unica squadra vincitrice riceva il doppio di caramelle rispetto agli alunni delle rimanenti squadre. Sapendo che in tutto la maestra distribuisce 540 caramelle, quante caramelle riceve ogni vincitore?
(A) 15 **(B)** 18 **(C)** 27 **(D)** 30 **(E)** 36.

10) Supponiamo che, nel cerchio in figura, l'angolo $B\widehat{A}C$ sia di 35°. Sia CD il diametro passante per C, quanto vale $B\widehat{C}D$?
(A) 35°
(B) 45°
(C) 50°
(D) 55°
(E) nessuna delle precedenti.



11) Qual è la negazione di *"tutti i numeri perfetti sono pari"*? (Non è necessario sapere cos'è un numero perfetto.)
(A) Tutti i numeri perfetti sono dispari
(B) c'è almeno un numero perfetto dispari
(C) c'è almeno un numero pari che non è perfetto
(D) nessun numero dispari è perfetto
(E) nessun numero pari è perfetto.

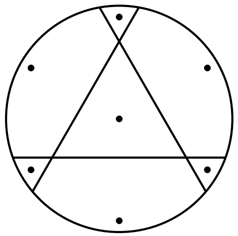
12) Segando un pezzo di legno a forma di parallelepipedo rettangolo si vuole estrarre un altro parellelepipedo di dimensioni 3 cm $\times$ 4 cm $\times$ 5 cm facendo tre tagli paralleli alle facce. Lavorando con la sega si può solo garantire che le dimensioni reali si discosteranno di al più 1 mm da quelle desiderate. Quanto si può discostare, al più, il volume del parallelepipedo costruito da quello del parallelepipedo desiderato?
(A) Circa 0,5 cm^3 **(B)** circa 1,2 cm^3 **(C)** circa 2 cm^3 **(D)** circa 2,4 cm^3
(E) circa 4,8 cm^3.

13) Qual è la probabilità che lanciando tre volte un dado la somma dei valori ottenuti sia minore o uguale a 5?
(A) Meno del 3% **(B)** tra 3% e 5% **(C)** tra 5% e 7% **(D)** tra 7% e 9%
(E) più del 9%.

14) Quale dei seguenti numeri termina con il maggior numero di zeri?
(A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ **(B)** $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ **(C)** $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ **(D)** $4^4 \cdot 5^6 \cdot 6^4$ **(E)** $4^6 \cdot 6^5 \cdot 5^4$.

15) Siano x e y numeri reali tali che $xy < x$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?
(A) $x^2y > x^2$ **(B)** $y \geq 1$ **(C)** $xy^2 > xy + 3$ **(D)** $xy^2 = xy$
(E) $x^2 + y^2 \leq 4(y-1)$.

16) Antonio e Barbara compiono gli anni lo stesso giorno. Antonio compie 7 anni e, sistemando opportunamente le candeline, con tre tagli rettilinei può dividere la sua torta di compleanno in modo che ogni parte contenga esattamente una candelina (vedi figura a fianco). Barbara riesce a fare la stessa operazione con la sua torta facendo 4 tagli rettilinei, ma sa che il prossimo anno 4 tagli non basteranno più, comunque siano disposte le candeline. Quanti anni compie Barbara?

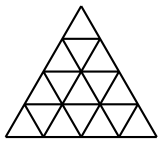


(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 14 **(E)** 16.

17) Sia G il baricentro del triangolo ABC. Sapendo che $AB < AC < BC$, quale fra i triangoli GAB, GAC, GBC ha area massima?
(A) GAB **(B)** GAC **(C)** GBC **(D)** hanno tutti la stessa area
(E) dipende dalle lunghezze dei lati di ABC.

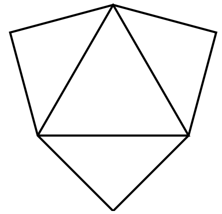
18) Qual è il più piccolo intero di cinque cifre divisibile per 3 e per 13?
(A) 10011 **(B)** 10020 **(C)** 10036 **(D)** 10062 **(E)** nessuno dei precedenti.

19) Quanti triangoli equilateri sono presenti in questa figura?
(A) 16
(B) 20
(C) 25
(D) 26
(E) 27.



20) Due matematici, Andrea e Sara, si incontrano una sera. Andrea dice *"la somma delle cifre della mia età è uguale alla somma delle cifre della tua età"*, e Sara risponde *"ma il prossimo anno la mia somma sarà il quadruplo della tua"*, al che Andrea ribatte *"sì, ma fra due anni le nostre somme saranno nuovamente uguali"*. Tenuto conto che nessuno dei due ha ancora raggiunto i 100 anni, quanti anni ha Sara?
(A) Meno di 20 **(B)** tra 21 e 30 **(C)** tra 31 e 40 **(D)** più di 40
(E) non si può stabilire univocamente.

21) La figura a fianco è lo sviluppo di una piramide retta avente come base un triangolo equilatero di lato 1 e come facce laterali tre triangoli rettangoli isosceli uguali. Il volume della piramide è



(A) $\frac{1}{24}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{24}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{24}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** $\frac{\sqrt{5}}{24}$.

22) Su un'isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza.
Il vecchio afferma: *"Io sono paggio"; "Il ragazzo è cavaliere"*.
Il ragazzo dice: *"Io sono cavaliere"; "La ragazza è paggio"*.
La ragazza afferma infine: *"Io sono furfante"; "Il vecchio è paggio"*.
Si può allora affermare che tra i tre:
(A) c'è esattamente un paggio
(B) ci sono esattamente due paggi
(C) ci sono esattamente tre paggi
(D) non c'è alcun paggio
(E) il numero dei paggi non è sicuro.

23) Quale fra le seguenti espressioni rappresenta la metà di 4^{1998}?
(A) 2^{1998} **(B)** 4^{1997} **(C)** 2^{999} **(D)** 4^{999} **(E)** 2^{3995}.

24) Sappiamo che $x = 0,9\ldots$ e che $1/x = 1,1\ldots$ (i puntini indicano che le ulteriori cifre decimali sono state omesse). Qual è la cifra che viene subito dopo il 9 nello sviluppo decimale di x?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 9 **(D)** non si può determinare univocamente
(E) nessuno dei precedenti.

25) Quale dei seguenti numeri NON divide 100! (ricordiamo che $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$)?
(A) 1968 **(B)** 1988 **(C)** 1998 **(D)** 2008 **(E)** 2048.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

1 dicembre 1999

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.

2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.

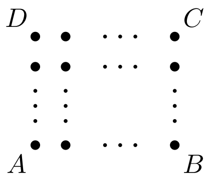
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.

4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ______________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) In un frutteto rettangolare c'è un albero ogni 4 metri (come in figura). Sapendo che ci sono 35 alberi, quanto misura il perimetro del rettangolo che ha per vertici i punti in cui ci sono gli alberi A, B, C, D?
(A) 70 **(B)** 80 **(C)** 96 **(D)** 140
(E) non si può determinare univocamente.



2) Un orologio digitale a 4 cifre indica l'ora da 00:00 a 23:59. Per quanti minuti durante la giornata il numero che indica le ore ed il numero che indica i minuti sono entrambi quadrati perfetti (si ricorda che 0 è un quadrato perfetto)?
(A) 25 **(B)** 28 **(C)** 32 **(D)** 35 **(E)** 40.

3) Sia $MNOPQ$ un pentagono in cui $QM = NO = 8$ cm, $PQ = 5$ cm, $OP = 12$ cm e gli angoli in M, N e P sono retti. Quanto vale il perimetro del pentagono?
(A) 33 cm **(B)** 40 cm **(C)** 46 cm **(D)** 47 cm **(E)** 50 cm.

4) Quanto vale $(12,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{111})$?
(A) 10^{110} **(B)** 1^{110} **(C)** 10^{37} **(D)** $100 \cdot 10^{-333}$ **(E)** 1000^{108}.

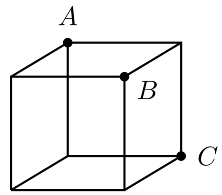
5) In un quadrato magico, la somma dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e delle due diagonali è costante. Nel quadrato magico a fianco quanto vale $a + b + c$?
(A) 20 **(B)** 22 **(C)** 26 **(D)** 44 **(E)** 48.

16	2	a
c	10	d
b	e	4

6) Qual è la probabilità che, estratti due numeri interi a caso (anche uguali) compresi fra 1 e 12 (estremi inclusi), il loro prodotto sia multiplo di 5?
(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{11}{36}$ **(C)** $\frac{5}{24}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

7) Qual è la cifra delle unità di 1999^{1999}?
(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** nessuna delle precedenti.

8) Dato il cubo in figura, con gli spigoli di lato 1, lo si tagli lungo il piano ABC. Qual è il volume della parte più piccola così ottenuta?
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{8}$ **(E)** $\frac{1}{12}$.



9) Siano x e y due numeri reali tali che $x > y$. Quali delle seguenti disuguaglianze è sempre verificata?
(A) $x^2 > xy$ **(B)** $x^2 > y^2$ **(C)** $x/y > 1$ **(D)** $x^3 > y^3$ **(E)** $x^4 > y^4$.

10) Due ciclisti partono contemporaneamente da due punti diametralmente opposti di una pista circolare lunga 400 m. Essi girano nello stesso senso a velocità costante di 35 km/h e 40 km/h rispettivamente. Dopo quanti giri il ciclista più veloce raggiungerà l'altro?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

11) Scriviamo in ordine crescente tutti i numeri interi positivi che non sono né multipli di 2 né multipli di 3. Quale numero si trova in 1999–esima posizione?
(A) 1999 **(B)** 3997 **(C)** 5995 **(D)** 11989 **(E)** nessuno dei precedenti.

12) Sui tre lati AB, BC, CA di un triangolo ABC si considerino rispettivamente tre punti L, M, N tali che $AL = \frac{1}{2}BL$, $BM = \frac{1}{2}MC$, $CN = \frac{1}{2}NA$. Qual è il rapporto fra l'area del triangolo LMN e quella del triangolo ABC?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ **(D)** $\frac{1}{2}$
(E) dipende dal particolare triangolo considerato.

13) Sia $x = 99 - 70\sqrt{2}$. Allora
(A) $x \leq -\frac{1}{100}$ **(B)** $-\frac{1}{100} < x < 0$ **(C)** $x = 0$ **(D)** $0 < x < \frac{1}{100}$
(E) $x \geq \frac{1}{100}$.

14) Un orologio analogico ha perso la lancetta dei minuti, ma funziona ancora correttamente. La lancetta delle ore è in corrispondenza del minuto 23. Sapendo che è pomeriggio, che ore sono?
(A) Le 15:23 **(B)** le 16:23 **(C)** le 16:30 **(D)** le 16:36 **(E)** le 16:40.

15) Sia N la somma dei 25 numeri primi più piccoli. La cifra delle unità di N è uguale a
(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 0.
NOTA. Si ricorda che il numero 1 non è considerato primo e che quindi il numero primo più piccolo è 2.

16) Quante radici reali possiede l'equazione $9 - 2^x = 2^{3-x}$?
(A) Due **(B)** più di due, ma un numero finito **(C)** nessuna **(D)** infinite **(E)** una.

17) Nel mio cassetto ci sono 8 calze blu e 8 calze nere, alla rinfusa. Pesco al buio 8 calze a caso. Quale tra le seguenti è l'eventualità più probabile?
(A) Pescare 4 calze di un colore e 4 di un altro
(B) pescare 5 calze di un colore e 3 di un altro
(C) pescare 6 calze di un colore e 2 di un altro
(D) pescare 7 calze di un colore e 1 di un altro
(E) pescare 8 calze di un colore e 0 di un altro.

18) Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
(A) Se un quadrilatero ha tutti i lati uguali, allora ha anche tutti gli angoli uguali
(B) Se un quadrilatero ha tutti gli angoli uguali, allora ha anche tutti i lati uguali
(C) Se un quadrilatero ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali
(D) Esiste un triangolo con tutti gli angoli uguali, ma in cui i lati non sono tutti uguali
(E) Esiste un pentagono con tutti gli angoli uguali, ma in cui i lati non sono tutti uguali.

19) In quanti modi si possono disporre 3 ragazzi e 3 ragazze per una foto di gruppo, sistemando i 3 ragazzi accovacciati e le 3 ragazze in piedi dietro di loro?
(A) 9 **(B)** 24 **(C)** 36 **(D)** 54 **(E)** 81.

20) Sia n il più piccolo numero intero positivo divisibile per 20 e tale che la somma delle sue cifre sia divisibile per 1999. Quante cifre ha n?
(A) Meno di 222 **(B)** 222 **(C)** 223 **(D)** 224 **(E)** più di 224.

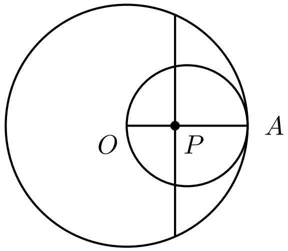
21) Un quadrato $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio unitario. Qual è la lunghezza del raggio della circonferenza che passa per A ed è tangente ai lati BC e CD?
(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $2(\sqrt{2}-1)$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\sqrt{2}$ **(E)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22) Quale dei seguenti numeri non può essere scritto nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ con a e b interi positivi?
(A) $\frac{25}{12}$ **(B)** $\frac{10}{3}$ **(C)** $\frac{7}{3}$ **(D)** $\frac{17}{4}$ **(E)** $\frac{29}{10}$.

23) Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti i cavalieri dicono sempre la verità ed i furfanti mentono sempre. Supponi di incontrarvi Andrea che dice *"Bruno afferma che Carlo è un furfante, ma Carlo afferma che Diego è un furfante e Diego afferma che Bruno è un furfante"*. Che cosa puoi dedurne?
(A) Bruno, Carlo e Diego sono tutti furfanti
(B) Bruno, Carlo e Diego sono tutti cavalieri
(C) tra Bruno, Carlo e Diego ci sono due furfanti e un cavaliere
(D) tra Bruno, Carlo e Diego ci sono due cavalieri e un furfante
(E) Andrea è un furfante.

24) L'intero $n > 0$ in base dieci si scrive solo con le cifre 3 e 5 ed ha un numero dispari di cifre. Inoltre è divisibile per 11. Qual è il minimo numero di cifre che può avere n?
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 15 **(E)** non esiste un tale n.

25) Le circonferenze disegnate a fianco hanno raggio 2 e 1 e sono tangenti internamente nel punto A. A che distanza da O deve essere il punto P affinché le corde intercettate dalla perpendicolare in P ad OA siano di lunghezza una il doppio dell'altra?
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$.



PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

5 dicembre 2000

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

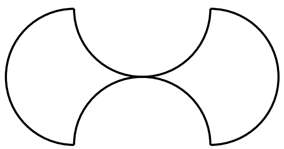
Nome ____________________ *Cognome* ____________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Un podista e un ciclista partono insieme dalla città A diretti alla città B distante da A 13 km, con l'accordo di fare la spola fra A e B senza fermarsi mai. Sapendo che ogni ora il podista percorre 9 km mentre il ciclista ne percorre 25, quale distanza separerà i due sportivi dopo tre ore dall'inizio della competizione?
(A) 1 km **(B)** 2 km **(C)** 3 km **(D)** 4 km **(E)** 5 km.

2) Quale fra i seguenti numeri è superiore all'unità?
(A) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ **(B)** $(1,1)^{-1,1}$ **(C)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ **(D)** $(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{2}-1}$
(E) $(2-\sqrt{3})^{2-\sqrt{3}}$.

3) Il perimetro della regione raffigurata a fianco è formato da quattro semicirconferenze di diametro 10 cm. Quanto vale la sua area?
(A) 100 cm^2 **(B)** $100\pi\sqrt{2}$ cm^2 **(C)** 50π cm^2
(D) 100π cm^2 **(E)** 25π cm^2.



4) Un padre ha 46 anni e la somma delle età dei suoi tre figli è 22. Entro quanti anni l'età del padre sarà uguale alla somma delle età dei figli?
(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** mai.

5) Nel triangolo ABC le semirette AN e CM sono le bisettrici di $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{C}A$ e si intersecano in P. Sapendo che $A\widehat{P}C = 140°$, quanto misura l'angolo in B?
(A) 90° **(B)** 100° **(C)** 110° **(D)** 120° **(E)** 130°.

6) Si considerino i numeri naturali n di tre cifre che verificano la seguente proprietà: le cifre di n sono tre numeri consecutivi in ordine qualsiasi (esempio 645). Quanti fra questi numeri sono primi?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** più di 2, ma meno di 10 **(E)** più di 10.

7) Fra tutti i triangoli i cui lati misurano 4, 5, x, quello di area massima avrà x pari a
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 4,5 **(D)** $\sqrt{20}$ **(E)** $\sqrt{41}$.

8) Una novella Penelope ha tessuto una tela per tutto il 1999, dal primo all'ultimo giorno. Ogni mattina ha tessuto 20 cm di tela e ogni pomeriggio ne ha disfatta un po', precisamente 20 cm nei giorni pari del mese e 19 cm nei giorni dispari. Quanto era lunga la tela alla fine?
(A) 140 cm **(B)** 172 cm **(C)** 186 cm **(D)** 200 cm **(E)** 210 cm.

9) In una scuola il 60% degli studenti è di sesso maschile, il 90% è minorenne ed il 60% ha i capelli castani. Quale delle seguenti affermazioni e necessariamente vera?
(A) C'è almeno una ragazza maggiorenne.
(B) C'è almeno una ragazza con i capelli castani.
(C) C'è almeno un ragazzo minorenne e castano.
(D) Non ci sono ragazzi maggiorenni e castani.
(E) C'è almeno un ragazzo biondo.

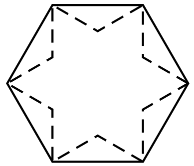
10) Sapendo che $\frac{1}{a} = a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = 2$ quanto vale il prodotto $abcd$?
(A) $\frac{5}{16}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{9}{16}$ **(E)** $\frac{5}{4}$.

11) Marco dice: '*'La mia squadra è stata davanti alla tua in classifica per tutte le prime tre giornate, e solo ora alla quarta ci avete raggiunti".*
Roberto risponde: *"Non ti dimenticare però che alla terza giornata abbiamo pareggiato proprio in casa vostra e che, al contrario di voi, siamo ancora imbattuti".*
Quanti punti ha ognuna delle due squadre al termine della quarta giornata? (Si assegnano 3 punti alla squadra che vince, 0 punti a quella che perde, 1 punto a ciascuna squadra in caso di pareggio).
(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** i dati sono insufficienti.

12) Il prezzo della mascotte delle olimpiadi di matematica è dato dalla somma del prezzo delle materie prime e del prezzo della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava 10 Euro. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato,

mentre il costo della lavorazione è aumentato del 10%; di conseguenza quest'anno la mascotte costa 12 Euro. Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?
(A) Meno di 1 Euro **(B)** tra 1 e 2 Euro **(C)** tra 2 e 3 Euro
(D) tra 3 e 4 Euro **(E)** più di 4 Euro.

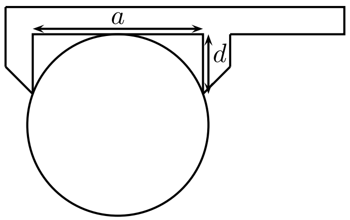
13) Il rapporto fra l'area dell'esagono regolare e quella del poligono stellato rappresentato in figura, che ha tutti i lati giacenti su 6 delle diagonali dell'esagono, è
(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\frac{6}{5}$ **(E)** $\frac{5}{4}$.



14) Emanuele ha fatto un lungo viaggio e non riesce a dormire. Dopo essere tornato in Italia, alle 11:11 precise ora italiana egli afferma: *"non dormo da 53 ore e 53 minuti"*. A che ora si à svegliato l'ultima volta, sapendo che in quel momento si trovava in Corea e ora si trova in Italia (ricordiamo che la differenza di fuso orario fra l'Italia e la Corea è di di 7 ore in avanti)?
(A) 12:04 **(B)** 12:18 **(C)** 12:58 **(D)** 13:04 **(E)** 13:18.

15) Si ha, per ogni x, $f(x) = 4^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ vale:
(A) $f(x)$ **(B)** $2f(x)$ **(C)** $3f(x)$ **(D)** 4 **(E)** 1.

16) Uno studente vuole misurare il diametro di un cilindro usando un calibro Purtroppo lo strumento disponibile ha i becchi troppo corti, e non è possibile fare in modo che essi tocchino contemporaneamente due punti diametralmente opposti della superficie laterale. Lo studente decide allora di utilizzare il metodo mostrato nella figura a fianco, in cui il bordo del regolo è tangente alla superficie laterale del cilindro. Detta a la misura letta sul regolo del calibro e d la distanza fra l'estremità di un becco e il regolo, si ha che il diametro vale



(A) $\sqrt{a^2+d^2}$ **(B)** $a+\frac{d^2}{4a}$ **(C)** $a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{d^2}{4}}$ **(D)** $d+\frac{a^2}{4d}$ **(E)** $d+\frac{1}{2}\sqrt{d^2+\frac{a^2}{4}}$.

17) Si sa che il numero $2^{48} - 1$ possiede esattamente due divisori compresi fra 60 e 70. Quali sono?
(A) 61 e 63 **(B)** 61 e 65 **(C)** 63 e 65 **(D)** 61 e 67 **(E)** 63 e 69.

18) Siano a, b, c le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$. Sapendo che $ab = 10$, calcolare $c(a+b)$.
(A) -28 **(B)** -18 **(C)** 21 **(D)** 22 **(E)** non si può determinare.

19) Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza unitaria. Il suo volume è
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20) Quante sono le coppie ordinate di interi (a, b), con $1 < a < 2000$, $1 < b < 2000$ tali che il minimo comune multiplo fra a e b è uguale a 2000?
(A) 14 **(B)** 20 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 48.

21) Sia D il dominio del piano cartesiano costituito dai punti (x, y) tali che $x - [x] \leq y - [y]$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ (ricordiamo che $[a]$ indica la parte intera di a ossia il più grande intero minore o uguale ad a). L'area di D è
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6.

22) Un comune dado con le facce numerate da 1 a 6 viene lanciato tre volte e ogni volta si prende un bastoncino di lunghezza pari al risultato del lancio. Qual è la probabilità che i tre bastoncini costituiscano i lati di un triangolo rettangolo?
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{36}$ **(C)** $\frac{1}{216}$ **(D)** $\frac{5}{18}$ **(E)** $\frac{1}{72}$.

23) Anna, Barbara,Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex aequo. Al ritorno,
Anna dice: "*Chiara è arrivata prima di Barbara*";
Barbara dice: "*Chiara è arrivata prima di Anna*";
Chiara dice: "*Io sono arrivata seconda*".
Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,
(A) si può dire solo chi ha vinto
(B) si può dire solo chi è arrivata seconda
(C) si può dire solo chi è arrivata terza
(D) si può dire solo chi è arrivata ultima
(E) non si può stabilire la posizione in classifica di nessuna.

24) Un ladro ha visto Marco legare la propria bicicletta usando un lucchetto con una combinazione di 4 cifre (ciascuna cifra va da 0 a 9). Non è riuscito a vedere la combinazione ma ha scoperto che almeno due cifre consecutive sono uguali. Qual è il numero massimo di combinazioni che il ladro dovrà provare per rubare la bicicletta a Marco?
(A) 2160 **(B)** 2530 **(C)** 2710 **(D)** 3000 **(E)** nessuna delle precedenti.

25) Nella tomba del faraone Tetrankamon è stato ritrovato uno smeraldo, lavorato a forma di tetraedro (piramide a base triangolare) i cui spigoli misurano in millimetri 54, 32, 32, 29, 27, 20. Indicando con A, B, C, D i vertici del tetraedro e sapendo che AB è lungo 54, quanti millimetri è lungo CD?
(A) 32 **(B)** 29 **(C)** 27 **(D)** 20 **(E)** non si può determinare.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

5 dicembre 2001

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ____________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Dei numeri interi hanno media 6 e somma 18. Quanti sono gli interi?
(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 12 **(D)** 108 **(E)** non si può determinare.

2) Se a e b sono due interi con $1 \leq b \leq 3$ allora il numero delle frazioni (ridotte ai minimi termini) della forma $\frac{a}{b}$ tali che $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$ è
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** infinito.

3) In una scuola il 40% degli allievi ha difetti alla vista, tra questi il 70% usano solo gli occhiali e il 30% solo le lenti a contatto. Sapendo che in tutto vi sono 42 paia occhiali, quale fra queste affermazioni è vera?
(A) 90 allievi hanno difetti alla vista
(B) 60 allievi vedono bene
(C) la scuola ha 200 allievi
(D) 20 allievi hanno le lenti a contatto
(E) nessuna delle precedenti.

4) Una famiglia composta dai due genitori e da due giovani figli vuole attraversare un fiume. La loro barchetta può portare al più due giovani o un solo adulto. Contando sia gli attraversamenti in un senso che quelli nell'altro, qual è il numero minimo di attraversamenti che la barchetta deve fare? (ovviamente la barca non può attraversare il fiume senza essere condotta).
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9.

5) Si consideri il quadrato $ABCD$ di lato 24. Esterni al quadrato si costruiscano i triangoli isosceli AEB, CGD di lato 13 e basi AB e CD, e i triangoli isosceli BFC, DHA di lato 15 e basi BC, DA. Quanto vale l'area del quadrilatero $EFGH$?
(A) 357 **(B)** 714 **(C)** 912 **(D)** 952 **(E)** 1428.

6) Per quali valori reali di α esiste una ed un'unica coppia di numeri reali (x, y) che è soluzione del sistema a fianco?
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha \\ x = 3y \end{cases}$$
(A) $\alpha = 0$ **(B)** $\alpha = 3$ **(C)** $\alpha > 0$ **(D)** $\alpha = \sqrt{3}$ **(E)** $\alpha \neq 0$.

7) Diciannove studenti devono ricevere borse di studio per un totale di 20 000 Euro. L'ammontare di ciascuna borsa è espressa da un numero intero di Euro. Tutti i ragazzi riceveranno lo stesso ammontare e così le ragazze. Ma ogni ragazza riceverà 600 Euro più dei ragazzi. Quanto ricevono a testa i ragazzi?
(A) 600 **(B)** 800 **(C)** 1400 **(D)** 1600
(E) solo le ragazze ricevono una borsa.

8) Un dado perfettamente equilibrato viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che né il punteggio del primo lancio, né la somma dei punteggi del primo e del secondo lancio, né la somma dei punteggi dei primi tre lanci sia divisibile per 7?
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{25}{36}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{5}{6}$.

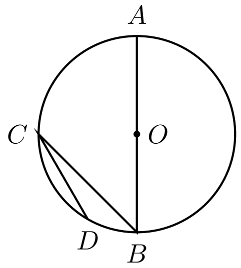
9) Nel Far West due fiumi rettilinei scorrono parallelamente alla distanza di 10 km. Lo stregone di un villaggio indiano, che si trova nella sua capanna, deve raccogliere un'ampolla d'acqua da ciascuno dei due fiumi e portare le ampolle al villaggio per la cerimonia della preghiera a Manitù. Qual è la minima distanza del percorso che deve compiere, sapendo che la capanna e il villaggio sono equidistanti dai due fiumi e distano fra loro 48 km?
(A) 48 **(B)** 52 **(C)** 53 **(D)** 58 **(E)** $\sqrt{48^2 + 10^2}$.

10) Per il furto in casa de Ricchis i sospetti si sono ristretti a 4 persone: Aldo, bruno e senza occhiali, Baldo, bruno e con gli occhiali, Carlo, biondo e con gli occhiali, e Dario, biondo e senza occhiali. La polizia ha accertato che il furto è stato commesso da una sola persona, che si è avvalsa di un unico complice. I sospetti si sono ristretti a 4 persone; le loro deposizioni sono le seguenti.
Aldo: *"Il colpevole è bruno e porta gli occhiali"*.
Baldo: *"Il colpevole è biondo e non porta gli occhiali"*.
Carlo: *"Il colpevole porta gli occhiali e il suo complice è Aldo"*.
Dario: *"Il colpevole è bruno e il suo complice è Carlo"*.
Si sa che le due affermazioni del colpevole sono false, mentre una sola affermazione del complice è falsa. Gli altri hanno detto la verità. Chi sono il colpevole e il suo complice?
(A) Aldo e Carlo **(B)** Baldo e Carlo **(C)** Baldo e Dario
(D) Aldo e Dario **(E)** non è possibile dedurlo.

11) Sia $P(x)$ un polinomio i cui coefficienti sono o 0 o 1. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.
(A) $P(2)$ non può valere 51 **(B)** $P(3)$ non può valere 37
(C) $P(3)$ non può valere 92 **(D)** $P(4)$ non può valere 20
(E) $P(5)$ non può valere 150.

12) Quanti numeri interi positivi sono uguali al triplo della somma delle loro cifre?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** infiniti.

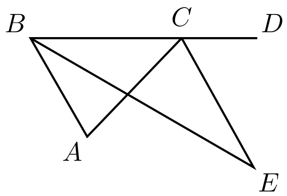
13) Nella figura a fianco, calcolare CD sapendo che $OB = 1$, $A\widehat{B}C = 45°$, $B\widehat{C}D = 15°$.



14) Ieri Pierino si è dilettato a fare la somma dei numeri dispari da 1 fino ad un certo valore. Quali delle seguenti somme è sicuramente errata?
(A) 625 **(B)** 1225 **(C)** 2025 **(D)** 3025 **(E)** 4525.

15) Un numero positivo x soddisfa la disuguaglianza $\sqrt{x} < 3x$ se e solo se:
(A) $x > \frac{1}{9}$ **(B)** $x > 3$ **(C)** $x > 9$ **(D)** $x < \frac{1}{9}$ **(E)** $x < 9$.

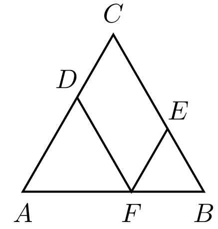
16) Nella figura a fianco, $A\widehat{B}E = E\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}E = E\widehat{C}D$. Sapendo che $C\widehat{E}B = y$, allora l'angolo $B\widehat{A}C$ è uguale a
(A) $90° - y$ **(B)** $90° - \frac{y}{2}$ **(C)** $2y$
(D) $180° - 2y$ **(E)** y.



17) L'impiegato del censimento nell'isola dei Cavalieri e Furfanti deve determinare il tipo (Cavalieri o Furfanti) e il titolo di studio degli abitanti (i Furfanti mentono sempre, mentre i Cavalieri dicono sempre la verità). In un appartamento abitato da due coniugi ottiene solo queste risposte:
Marito: *siamo entrambi laureati.*
Moglie: *siamo entrambi dello stesso tipo.*
Quante caselle può riempire con sicurezza l'impiegato?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

18) In un'isola di cavalieri e di furfanti, questi ultimi sono in numero doppio rispetto ai cavalieri. A ciascun abitante dell'isola viene chiesto quanti sono i cavalieri. Mentre ogni cavaliere fornisce la risposta esatta, il primo furfante fornisce il numero esatto aumentato di 1, il secondo furfante il numero esatto aumentato di 2, e così progressivamente. Sapendo che la somma di tutte le risposte è 1140, quanti sono gli abitanti dell'isola?
(A) 30 **(B)** 45 **(C)** 60 **(D)** 90 **(E)** 99.

19) Sapendo che il perimetro del parallelogramma $FECD$ è 4, l'area del triangolo equilatero ABC risulta uguale a:
(A) 8
(B) $\sqrt{3}$
(C) 4
(D) 6
(E) $2\sqrt{3}$.



20) Si considerino tutti i numeri di 8 cifre formati utilizzando una e una sola volta ognuna delle cifre 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Supponendo di farne il prodotto, qual è la cifra delle unità di quest'ultimo?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

21) Un numero viene prima raddoppiato e poi diminuito di un'unità. Applicando questo procedimento 2000 volte di seguito si perviene al risultato $2^{2001} + 1$. Qual è il numero di partenza?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

22) Tre amici si stanno dividendo in parti uguali un cesto di mele e si accorgono di poterlo fare senza tagliare le mele. Arriva un quarto amico e decidono di rifare la divisione, sempre in parti uguali e riescono nuovamente a farla senza tagliare le mele. Uno dei 4 va a casa e lungo la strada mangia 2 mele. Arrivato a casa si accorge di poter dividere le mele rimaste a metà con la propria ragazza senza tagliarle. Quante potevano essere al minimo le mele originarie?
(A) 12 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 36 **(E)** 50.

23) I numeri $p = 7 - \sqrt{47}$, $q = 5 - \sqrt{23}$ e $r = 2 - \sqrt{2}$, verificano:
(A) $r < q < p$ **(B)** $r < p < q$ **(C)** $p < q < r$ **(D)** $q < p < r$ **(E)** $q < r < p$.

24) Tre ciclisti partono da Cesenatico lungo la strada per Cortona. Il primo parte un'ora prima degli altri due, che partono assieme. Ciascuno dei ciclisti tiene una velocità costante. Dopo un certo tempo il terzo ciclista raggiunge il primo e due ore più tardi anche il secondo lo raggiunge. Il rapporto fra le velocità del secondo e del terzo ciclista è $\frac{2}{3}$. Quanto vale il rapporto fra la velocità del primo e quella del terzo?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$.

25) Per ogni numero reale x, sia $m(x)$ il minimo tra i numeri $2x$, $x + 1$, $10 - 2x$. Il massimo valore di $m(x)$ è:
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

20 novembre 2002

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

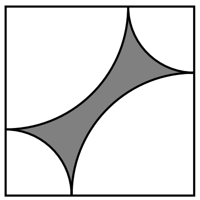
Nome ______________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) In alcuni casi, coppie di numeri di due cifre hanno lo stesso prodotto dei due numeri letti al contrario (ad esempio $13 \times 62 = 31 \times 26$). Quanti sono i numeri di due cifre AB (A e B sono le cifre decimali) tali che $12 \times AB = 21 \times BA$?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 9.

2) Una merce è stata scontata del 20% del suo prezzo originario. Di quale percentuale deve essere aumentata per riottenere il prezzo originario?
(A) 16% **(B)** 20% **(C)** 25% **(D)** 50% **(E)** 60%.

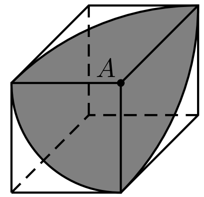
3) Nel quadrato a fianco, gli archi sono tutti dei quarti di circonferenze e hanno, a due a due, gli estremi in comune. Il rapporto fra il perimetro della figura in grigio e il perimetro del quadrato



(A) è $\frac{1}{4}$ **(B)** è $\frac{1}{\pi}$ **(C)** è $\frac{\pi}{4}$ **(D)** è $\frac{1}{2}$
(E) non può essere determinato con le informazioni date.

4) Una ruota avente diametro 5 cm è connessa ad un altra ruota tramite una cinghia di trasmissione. La prima ruota a 1000 giri al minuto. Che diametro dovrà avere la seconda ruota per ruotare a 200 giri al minuto?
(A) 20 cm **(B)** 25 cm **(C)** 27 cm **(D)** 50 cm
(E) dipende dalla distanza fra gli assi delle ruote.

5) Da un vertice A di un cubo si tracciano degli archi di cerchio con centro in A e raggio pari al lato del cubo su ciascuna delle tre facce aventi un vertice in A. Qual è la frazione della superficie del cubo ombreggiata?



(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{8}$ **(C)** $\frac{\pi}{8}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$
(E) dipende dal lato del cubo.

6) Quale delle seguenti espressioni è equivalente all'affermazione *"Fra tutti gli insegnanti, solo quelli con un coniuge ricco possiedono un'auto di lusso"*?
(A) *Se una persona possiede un'auto di lusso, allora essa è insegnante o ha un coniuge ricco.*
(B) *Se una persona è insegnante e ha un coniuge ricco, allora essa possiede un'auto di lusso.*
(C) *Se una persona è insegnante e possiede un'auto di lusso, allora essa ha un coniuge ricco.*
(D) *Se una persona ha un'auto di lusso, allora essa è un insegnante e ha un coniuge ricco.*
(E) *Se una persona ha un coniuge ricco, allora essa è un insegnante e possiede un'auto di lusso.*

7) Tre amiche vanno regolarmente al parco a correre: la prima ogni 10 giorni, la seconda ogni 15 e la terza ogni 14 giorni. Una domenica si trovano a correre insieme. Dopo quanti giorni si ritroveranno al parco per la prima volta a correre insieme?
(A) 150 **(B)** 210 **(C)** 350 **(D)** 420 **(E)** mai.

8) Quale dei numeri seguenti non è razionale?
(A) -2002 **(B)** $8^{\frac{2}{3}}$ **(C)** $\sqrt{0,49}$ **(D)** $100^{0,5}$ **(E)** $1000^{0,1}$.

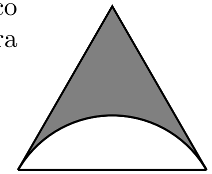
9) Due oggetti omogenei, fatti di due materiali diversi, hanno lo stesso volume, ma il primo pesa 242 g più del secondo. Sapendo che il materiale di cui è fatto il primo oggetto ha densità 8,9 g/cm^3 e quello di cui è fatto il secondo oggetto ha densità 7,8 g/cm^3, qual è il volume di ciascuno degli oggetti?
(A) 120 cm^3 **(B)** 150 cm^3 **(C)** 220 cm^3 **(D)** 300 cm^3
(E) i dati forniti sono insufficienti.

10) Il direttore di un ristorante con capienza di 600 posti non ricorda quante erano le persone da lui servite in occasione di un grande pranzo collettivo. Ricorda però che volendole sistemare in tavoli da 3 ne restava fuori esattamente una, e lo stessa cosa accadeva sistemandoli in tavoli da 4, da 5 o da 6. Invece, sistemandoli in tavoli da 7 non ne rimaneva fuori nessuna. Quanti erano i commensali?
(A) 61 **(B)** 121 **(C)** 175 **(D)** 301 **(E)** 574.

11) Per quali interi positivi a, b, c, d si può avere $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$?
(A) Quando $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ **(B)** quando $ad^2 = cb^2$ **(C)** quando $b \cdot d = b + d$
(D) mai **(E)** sempre.

12) Si lanciano due dadi; la probabilità che il punteggio del primo dado sia strettamente minore di quello del secondo è:
(A) $\dfrac{1}{6}$ **(B)** $\dfrac{1}{3}$ **(C)** $\dfrac{5}{12}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$ **(E)** $\dfrac{7}{12}$.

13) Sapendo che il triangolo equilatero in figura ha lato 3 e che l'arco di circonferenza è tangente a due lati, qual è l'area della figura in grigio?



(A) $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{6}$ **(B)** $\pi - \sqrt{3}$ **(C)** $2\sqrt{3} - \pi$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{3}+\pi}{6}$
(E) $3\sqrt{3} - \pi$.

14) La percentuale di femmine che nascono nei parti gemellari è del 48,5%. Supponendo che nei parti gemellari la probabilità che i due nati siano di sesso differente sia del 33%, qual è la probabilità che in un parto gemellare nascano due femmine?
(A) 32% **(B)** 33% **(C)** 33,33% **(D)** 35% **(E)** 50%.

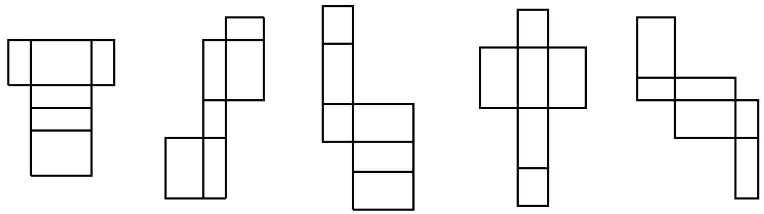
15) Un ciclista vuole percorrere un tratto di strada. A metà del percorso si rende conto di aver viaggiato solo alla media di 15 km/h; decide quindi di accelerare in modo da poter percorrere l'intero tragitto alla media più dignitosa di 30 km/h. A quale velocità deve percorrere la seconda metà del percorso?
(A) a 40 km/h **(B)** a 45 km/h **(C)** a 60 km/h **(D)** non può farcela
(E) dipende dalla lunghezza del tratto di strada.

16) Quante delle seguenti affermazioni riguardanti i numeri naturali sono vere?
(i) Presi due numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno uno è primo.
(ii) Presi tre numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno due sono primi.
(iii) Presi quattro numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno uno non è primo.
(iv) Presi cinque numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno due non sono primi.
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** due **(D)** tre **(E)** quattro.

17) Immaginando di prolungare tutte le facce di un cubo, in quante regioni viene diviso tutto lo spazio (compreso l'interno del cubo)?
(A) 9 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 32.

18) Nella lista che segue, una sola terna di numeri **non** può rappresentare termini di una progressione geometrica (i termini non sono necessariamente consecutivi). Qual è questa terna?
(A) 3; 6; 96 **(B)** 3; 1; $\dfrac{1}{81}$ **(C)** 3; 3,3; 3,993 **(D)** 3; 6; 48 **(E)** 3; 5; 9.

19) Quanti degli sviluppi disegnati sotto possono essere richiusi (effettuando le piegature lungo le linee segnate) in modo da ottenere delle scatole chiuse?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.



20) La somma delle cifre del quadrato di 999 999 999 999 999 995 è:
(A) 150 **(B)** 160 **(C)** 170 **(D)** 180 **(E)** 190.

21) Un canguro sale una scala di 5000 gradini in questo modo: prima salta sul 3° scalino, poi indietro di 1, poi su di 5, indietro di 3, avanti di 7, giù di 5 e così via. Purtroppo uno scalino è pericolante e se il canguro vi saltasse sopra cadrebbe a terra. Il canguro riuscirà a salire fino in cima se lo scalino pericolante è:
(A) il 2000° **(B)** il 2001° **(C)** il 2002° **(D)** il 2003°
(E) il canguro cadrà comunque.

22) In un liceo scientifico ci sono meno di 1000 studenti, di cui 230 frequentano le classi del triennio; gli alunni che frequentano la classe seconda sono i $\frac{13}{46}$ di tutti i rimanenti; inoltre, se si iscrivessero ancora 10 alunni alla prima, allora gli studenti di prima diventerebbero i $\frac{2}{5}$ del totale. Il numero di alunni della scuola è:
(A) 500 **(B)** 590 **(C)** 625 **(D)** 700 **(E)** 825.

23) In un'isola di furfanti (che mentono sempre) e cavalieri (che dicono sempre la verità) un esploratore incontra quattro abitanti del luogo, e chiede loro di che tipo sono. Le risposte che ottiene sono le seguenti:
(i) *"siamo tutti e quattro dei furfanti"*; (ii) *"no, fra noi c'è un solo cavaliere"*; (iii) *"no, ce ne sono esattamente due"*; (iv) *"io sono un cavaliere"*. Quanti dei quattro sono cavalieri?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** non è possibile dedurlo.

24) È ben noto che l'area di un triangolo equilatero di lato unitario non può essere espressa come numero razionale (cioè come rapporto di interi). Esistono tetraedri che hanno come base tale triangolo e il cui volume si esprime come numero razionale?
(A) Non ne esistono **(B)** ne esistono infiniti **(C)** solo il tetraedro regolare
(D) solo i tetraedri con altezza pari a $6\sqrt{3}$ **(E)** solo se il tetraedro è retto.

25) L'Orue è una valuta che dispone di due sole monete, da 8 e da 11 centesimi. Qual è la massima cifra che non può essere pagata esattamente?
(A) 58 centesimi **(B)** 61 centesimi **(C)** 87 centesimi
(D) esistono cifre arbitrariamente grandi che non sono pagabili esattamente
(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

Dedicati alla memoria di Franco Conti

19 novembre 2003

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) $\dfrac{3^{5/2}}{3^{2/3}} = \ldots$ **(A)** $\dfrac{1}{3}$ **(B)** 3 **(C)** $3^{15/4}$ **(D)** $3^{11/6}$ **(E)** $3^{19/6}$.

2) Qual è il più grande degli interi positivi n tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a n sia < 2003 ?
(Nota: la media aritmetica di n numeri è uguale alla loro somma divisa per n.)
(A) 2002 **(B)** 2003 **(C)** 4003 **(D)** 4004 **(E)** 4005.

3) È dato un triangolo (non degenere) i cui lati hanno come lunghezze i tre numeri naturali a, b e c. Sapendo che b e c sono multipli di a, cosa possiamo dire del triangolo?
(A) Ha sempre come area un numero intero
(B) ha sempre come area un numero razionale, ma non necessariamente intero
(C) è necessariamente isoscele
(D) potrebbe essere rettangolo
(E) non esistono triangoli siffatti.

4) In un'urna ci sono 9 palline, 3 bianche, 3 rosse e 3 blu. Tullio estrae contemporaneamente 3 palline. Qual è la probabilità che ne estragga una bianca, una rossa e una blu?
(A) $\dfrac{1}{27}$ **(B)** $\dfrac{1}{9}$ **(C)** $\dfrac{9}{28}$ **(D)** $\dfrac{6}{27}$ **(E)** $\dfrac{3}{14}$.

5) Un ciclista percorre una salita con velocità v costante e ridiscende per la stessa strada con velocità ancora costante ma pari al triplo della precedente. La velocità media nell'intero percorso di andata e ritorno è...
(A) $\dfrac{3}{4}v$ **(B)** $\dfrac{4}{3}v$ **(C)** $\dfrac{3}{2}v$ **(D)** $2v$ **(E)** dipende dalla lunghezza della strada.

6)
> In questo rettangolo c'è esattamente una affermazione falsa.
> In questo rettangolo ci sono esattamente due affermazioni false.
> In questo rettangolo ci sono almeno tre affermazioni false.
> In questo rettangolo ci sono al più tre affermazioni false.

Quante affermazioni vere ci sono nel rettangolo?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

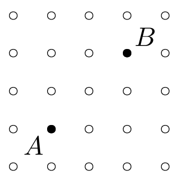
7) Quali delle diseguaglianze a fianco sono verificate per ogni valore reale positivo di x?
a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$
b) $x^2 \geq 2x - 2$
c) $x^4 - 2x^3 + x^2 \geq 0$.
(A) Tutte e tre **(B)** solo a) e b) **(C)** solo b) e c)
(D) solo a) **(E)** solo c).

8) Michael, Juan Pablo e Kimi partecipano a un campionato di automobilismo. Dopo 5 gran premi, Michael conduce la classifica con 43 punti, seguito da Juan Pablo con 42 punti e da Kimi con 40. In ognuna delle 5 gare disputate, il primo classificato guadagnava 10 punti, il secondo 8, il terzo 7, dal quarto posto in poi non si guadagnavano punti. Basandovi su queste informazioni, sapreste dire chi si è piazzato al secondo posto per il maggior numero di volte?
(A) Michael **(B)** Juan Pablo **(C)** Kimi **(D)** Michael e Juan Pablo
(E) Michael e Kimi.

9) Un triangolo ha due vertici nei punti di coordinate $(-4,\ 1)$ e $(2,\ -1)$ e il terzo vertice nel punto di coordinate $(1,\ k)$. Per quanti valori reali di k tale triangolo risulta isoscele?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** infiniti.

10) Un ragno vuole ispezionare la superficie esterna di una piramide a base quadrata, le cui facce laterali sono triangoli equilateri. Partendo dal centro di una faccia laterale, vuole toccare i centri di tutte le altre facce laterali, seguendo il cammino più breve possibile. Sapendo che uno spigolo della piramide misura 2, trovare la lunghezza totale del percorso.
(A) 4 **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** 3 **(D)** $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

11) In un ampio laghetto le foglie di ninfea sono disposte a reticolo, come nella figura a fianco. I rospi sono soliti muoversi con balzi da una foglia ad una adiacente in orizzontale o verticale. Un rospo si trova in A ed avvista un insetto in B. Per catturarlo, compie una traiettoria di 6 balzi (senza mai passare due volte sulla stessa foglia) che termina in B. Quante traiettorie diverse può aver compiuto?



(A) 24 **(B)** 26 **(C)** 28 **(D)** 32 **(E)** nessuna delle precedenti.

12) Una stazione spaziale vuole registrare il passaggio di un asteroide, che si muove nello spazio di moto rettilineo uniforme rispetto ad essa. Purtroppo il radar della stazione è danneggiato, e non fornisce misure affidabili della distanza, mentre misura con accuratezza l'angolo sotto il quale è visto l'asteroide. Vengono effettuati alcuni rilevamenti a intervalli di tempo regolari. Qual è il minimo numero di rilevamenti necessari per ricostruire la traiettoria dell'asteroide?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** un numero finito maggiore di 4
(E) nessun numero di rilevamenti è sufficiente.

13) Date le uguaglianze a sinistra, quale delle affermazioni a destra è vera?

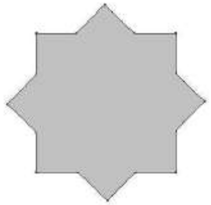
(I) $\dfrac{x^3-5x^2}{x^2}=\dfrac{3x-15}{3}$,
(II) $\dfrac{x-5}{1/2}=\dfrac{3x-15}{3/2}$,
(III) $\dfrac{x-5}{2}=x-\dfrac{5}{2}$

(A) (I), (II) e (III) sono vere per ogni x reale
(B) (I), (II) e (III) sono false per ogni x reale
(C) per ogni x reale, se (II) è vera lo è anche (III)
(D) per ogni x reale, se (II) è vera lo è anche (I)
(E) per ogni x reale, se (I) è vera allora (III) è falsa.

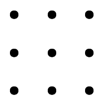
14) Quanti sono i numeri interi positivi n per i quali $8n+50$ è un multiplo di $2n+1$?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 10.

15) Se vale l'identità $\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax^3+bx^2+cx+d$, quanto vale $a+b+c+d$?
(A) $\dfrac{57}{4}$ **(B)** 9 **(C)** $\dfrac{289}{8}$ **(D)** 35 **(E)** nessuno dei valori precedenti.

16) Determinare l'area del poligono ottenuto come unione di due quadrati entrambi aventi lato di lunghezza 1, aventi lo stesso centro e ruotati di 45° l'uno rispetto all'altro.
(A) $4-2\sqrt{2}$ **(B)** $\dfrac{9}{8}$ **(C)** $2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\dfrac{5}{4}$
(E) le precedenti risposte sono sbagliate.



17) Sono dati 9 punti disposti a quadrato come nella figura a fianco. Quanti sono i possibili triangoli non degeneri che hanno i vertici in tre dei punti dati?
(A) 27 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 76 **(E)** 84.

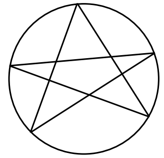


18) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano:
– fa 1 passo in avanti;
– poi si volta di 90° verso destra e fa 2 passi in avanti;
– poi si volta di 90° verso destra e fa 1 passo in avanti;
– poi si volta di 90° verso sinistra e fa 1 passo all'indietro;
– dopo di che ricomincia da capo.
Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto. A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{5}$ **(E)** 4.

19) Anna e Marco hanno una collezione di più di 40, ma meno di 80, cartoline. Anna nota che il numero delle cartoline meno 3 è multiplo di 8. Marco invece nota che il numero di cartoline meno 1 è multiplo di 5. Quante cartoline hanno in totale Anna e Marco?
(A) Tra 40 e 49 **(B)** tra 50 e 59 **(C)** tra 60 e 69 **(D)** tra 70 e 79
(E) è impossibile: hanno sbagliato a contare.

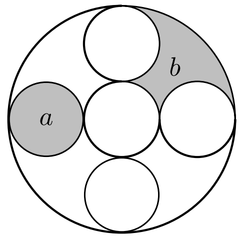
20) Il polinomio $x^4-2x^3-7x^2-2x+1$ ha quattro radici reali a, b, c, d. Quanto vale $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$?
(A) -2 **(B)** 0 **(C)** -1 **(D)** 2 **(E)** nessuno dei valori precedenti.

21) Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?
(A) 100° **(B)** 150° **(C)** 180° **(D)** 200°
(E) i dati a disposizione sono insufficienti.



22) Si consideri l'insieme $\{1,2,\ldots,2003\}$. Quanti sono i suoi sottoinsiemi B tali che la somma degli elementi di B è uguale a 2 007 000?
(A) Non ne esistono **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 1002 **(E)** 2003.

23) Dette a e b le aree delle figure in grigio, dire quale fra le seguenti relazioni è valida (tutti i cerchi piccoli hanno lo stesso raggio r e i 4 tangenti a quello grande hanno i centri sui vertici di un quadrato).
(A) $a<b$, qualunque sia r **(B)** $a=b$, qualunque sia r
(C) $a>b$, qualunque sia r
(D) $a<b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di r
(E) $a>b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di r.



24) Il potente computer di Enrico è stato da poco infettato da un virus che cancella un po' alla volta tutta la memoria. Ogni minuto che passa, la regione cancellata viene quadruplicata, e ulteriormente incrementata di 1 byte. Enrico congela il computer quando ormai la situazione è compromessa: egli calcola che non solo tra un minuto il virus avrà corrotto tutta la memoria, ma anzi ormai basterebbe triplicare la regione cancellata e aggiungere 1 byte per esaurire esattamente la memoria del computer, che ammonta a 2.5 Gb $=2.5\cdot 2^{30}$ byte. Quanto era grande la regione cancellata 14 minuti fa?
(A) 1 byte **(B)** 2 byte **(C)** 3 byte **(D)** 4 byte **(E)** 16 byte.

25) Sul triangolo ABC si costruisce una piramide di vertice V e base ABC. P è un punto sullo spigolo VA tale che BP e CP siano fra loro ortogonali e siano altezze rispettivamente dei triangoli BAV e CAV. Sapendo che P divide VA in due segmenti di lunghezza 1 cm e 2 cm e che le altezze BP e CP sono lunghe rispettivamente 3 cm e 4 cm, determinare il volume (in cm^3) della piramide.
(A) I dati non sono sufficienti per calcolare il volume **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 12
(E) non esiste una piramide siffatta.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2004

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Se $\sqrt{a^2+1}=b$, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \geq 0$, **(B)** $b \geq 0$, **(C)** $a > 1$, **(D)** $b \geq a^2+1$, **(E)** nessuna delle precedenti.

2) Su Marte la moda dei telefoni cellulari sta rapidamente prendendo piede. Il 17 novembre 10 marziani possiedono un cellulare e nei giorni successivi il numero dei marziani che possiedono un cellulare raddoppia ogni giorno. Quale è il primo giorno al termine del quale almeno 10000 marziani avranno un cellulare?
(A) 25 novembre, **(B)** 26 novembre, **(C)** 27 novembre, **(D)** 28 novembre, **(E)** 29 novembre.

3) Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 metri e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 metri anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto, in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura, senza uscirne. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena? (Solo per questo esercizio si trascurino le dimensioni del leone).
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

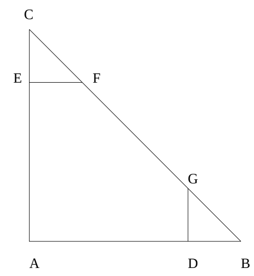
4) a, b e c sono tre numeri naturali. Sappiamo che a è divisibile per 15, b è divisibile per 12 e c è divisibile per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 18, **(B)** $a+b+c$ è divisibile per 9, **(C)** $a+b+c$ è divisibile per 2, **(D)** $(a+b+c)^2$ è divisibile per 9, **(E)** $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 15.

5) Il valore minimo di $a \geq 0$ per cui l'equazione

$$x^2+ax+a+1=0$$

ha almeno una soluzione reale è
(A) $2\sqrt{2}+2$, **(B)** $2\sqrt{2}-2$, **(C)** $3\sqrt{3}+3$, **(D)** $3\sqrt{2}-3$, **(E)** $2\sqrt{2}+3$.

6) Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele come in figura, con cateti di lunghezza L. I segmenti DG e EF sono perpendicolari ai lati AB e AC rispettivamente, inoltre i segmenti AE e AD sono lunghi $\frac{3}{4}L$. Sapendo che l'area del pentagono $ADGFE$ è 7 metri quadrati, si può dire che L è uguale a
(A) 1,5 m, **(B)** 3 m, **(C)** 1,3 m, **(D)** 1,6 m, **(E)** 4 m.



7) Quanti sono i multipli di 5 fra i numeri interi di 4 cifre che si scrivono senza usare altre cifre all'infuori di 0, 1, 2, 3, 4, 5 ? (È consentito impiegare più volte la stessa cifra; 0 non può essere la cifra iniziale).
(A) 180, **(B)** 216, **(C)** 360, **(D)** 396, **(E)** 1080.

8) Marco deve recarsi una volta all'anno, per lavoro, in un lontano Paese dalla dissestata economia, nel quale da un anno all'altro i prezzi raddoppiano. Tuttavia la moneta di quel Paese perde ogni anno il 30 per cento del suo valore rispetto all'Euro. La spesa (in Euro) sostenuta da Marco per il suo soggiorno nel 2004 risulta pertanto
(A) minore di quella del 2002, **(B)** uguale a quella del 2002, **(C)** superiore a quella del 2002, ma minore del doppio di essa, **(D)** uguale al doppio della spesa del 2002, **(E)** uguale al quadruplo della spesa del 2002.

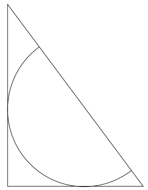
9) Quanti sono i numeri interi positivi n tali che $n^2-14n+24$ sia un numero primo?
(A) nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** nessuna delle precedenti risposte.

10) Una cassetta di legno, senza coperchio, è fabbricata con tavole spesse 2 cm. Se le dimensioni esterne della base (rettangolare) sono 38 cm e 44 cm e l'altezza esterna è 47 cm, di quanti centimetri cubi è il volume interno della cassetta?
(A) 61200 cm^3, **(B)** 63920 cm^3, **(C)** 68040 cm^3, **(D)** 75240 cm^3, **(E)** 78584 cm^3.

11) Quattro amici stanno conversando. Uno di loro dice: "Almeno due di noi sono bugiardi." Il secondo aggiunge: "È vero!" Il terzo ribatte: "Non è vero!" Quanti sono i bugiardi?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** i dati sono incongruenti, **(E)** mancano i dati per poter rispondere.

12) Venti soffici cuscini quadrati sono impilati uno sopra l'altro. Ogni cuscino pesa 500g ed ha inizialmente uno spessore di 30cm. Nella pila, però, lo spessore si riduce in ragione di 2cm per ogni chilo di peso sopra di esso (1cm per ogni mezzo chilo). Quanto è alta la pila di cuscini?
(A) 220cm, **(B)** 410cm, **(C)** 490cm, **(D)** 581cm, **(E)** mancano dati per poter rispondere.

13) Sia dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 21 e 28 cm e un semicerchio in esso inscritto come nella figura a fianco. Quanto misura l'area del semicerchio?
(A) 50π cm^2, **(B)** $\frac{441}{8}\pi$ cm^2, **(C)** 98π cm^2, **(D)** 72π cm^2, **(E)** $\frac{121}{2}\pi$ cm^2.



14) Quante sono le coppie (a, b) di numeri naturali tali che $a^2 - 4b^2 = 45$?
(A) nessuna, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** più di 3.

15) Una colonia di amebe si moltiplica in uno stagno. Inizialmente sono presenti un'ameba chiara e un'ameba scura; poi, ogni giorno per 2004 giorni consecutivi, una ameba a caso tra quelle esistenti (tutte hanno la stessa probabilità di essere scelte, indipendentemente dalla loro età) si divide in due amebe identiche al genitore. Qual è la probabilità che ci sia una sola ameba scura nello stagno alla fine del 2004° giorno?
(A) $1/2^{2004}$, **(B)** $1/2004$, **(C)** $1/2005$, **(D)** $1/(2004 \cdot 2005)$, **(E)** $2004/2005$.

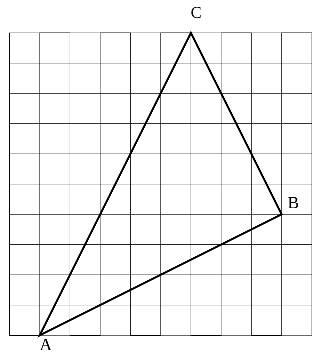
16) Quanti numeri interi relativi x risolvono l'equazione $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$?
(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** infiniti.

17) Nel quadrato $ABCD$ di lato 1 tracciamo la diagonale BD e il segmento CM, dove M è il punto medio di DA. Chiamiamo P il punto d'intersezione di BD e CM. Qual è l'area del triangolo DMP?
(A) $1/8$, **(B)** $1/10$, **(C)** $1/12$, **(D)** $1/16$, **(E)** nessuna delle precedenti.

18) Un intero si dice *parofilo* se l'espressione decimale di ogni suo multiplo termina con almeno due cifre pari. Determinare quale dei seguenti numeri è parofilo.
(A) 2004, **(B)** 2116, **(C)** 2122, **(D)** 2740, **(E)** 2942.

19) Alberto dice : "Sono piú vecchio io di Bruno"; Bruno risponde: "Carla è piú giovane di me" e Carla aggiunge: "ma io sono piú vecchia di Alberto". Una quarta persona afferma: "Sommando le età di Carla e Bruno si ottiene il doppio di quella di Alberto." Sapendo che una sola delle quattro affermazioni è falsa, come sono ordinate le età dei tre? (Nelle risposte a, b e c indicano le età di Alberto, Bruno e Carla rispettivamente).
(A) $a < b < c$, **(B)** $b < a < c$, **(C)** $c < a < b$, **(D)** $c < b < a$, **(E)** non si può determinare.

20) Quanto vale il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC in figura, se l'unità di misura di lunghezza u è pari al lato di un quadratino?
(A) $\sqrt{2}\, u$, **(B)** $\sqrt{3}\, u$, **(C)** $2\, u$, **(D)** $\sqrt{5}\, u$, **(E)** $\sqrt{6}\, u$.



21) Una successione di numeri è costruita in questo modo: il primo termine è 1, il secondo è 2 e, a partire dal terzo termine, ogni termine è il prodotto dei due precedenti. Quanto vale il tredicesimo termine?
(A) 2^{12}, **(B)** 2^{83}, **(C)** 2^{144}, **(D)** 2^{2048}, **(E)** 2^{4096}.

22) Quante soluzioni positive ha l'equazione $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/x)) = x$?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** infinite.

23) Su una striscia molto lunga sono scritte di seguito, in ordine alfabetico, tutte le parole di 4 lettere (incluse quelle prive di significato) ottenibili con le 21 lettere del nostro alfabeto a partire da AAAA. Qual è la 2004-esima lettera scritta?
(A) L, **(B)** M, **(C)** P, **(D)** T, **(E)** nessuna delle precedenti.

24) In un triangolo ABC si tracciano le bisettrici da B e da C che incontrano rispettivamente i lati AC e AB in D ed E. Detto I il punto di incontro delle bisettrici, si sa che il quadrilatero $IDAE$ è inscrivibile in una circonferenza. Allora l'angolo in A vale
(A) 30^o, **(B)** 45^o, **(C)** 60^o, **(D)** 90^o, **(E)** non si può determinare in modo univoco.

25) Pierino ha 10 mele, quattro delle quali sono marce. Egli le ripartisce in due sacchetti (non necessariamente lo stesso numero in ciascun sacchetto, ma non meno di 3 mele in ogni sacchetto), e propone ad un suo amico di scegliere un sacchetto, e successivamente di estrarre una mela dal sacchetto scelto. Come dovrà comporre i due sacchetti affinchè sia massima la probabilità che il suo amico estragga una mela marcia?
(A) La composizione non conta: la probabilità è in ogni caso $4/10$, **(B)** due mele marce e tre buone in ciascun sacchetto, **(C)** tre mele marce e due buone in un sacchetto, le rimanenti cinque nell'altro, **(D)** tutte e quattro le mele marce in un sacchetto, le rimanenti sei nell'altro, **(E)** tre mele marce in un sacchetto, le rimanenti sette nell'altro.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2005

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Qual è il valore massimo che può assumere il numero $a(b+c)-b(a+c)$ quando a, b e c sono numeri interi distinti tra loro, maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 10?
(A) 80, **(B)** 81, **(C)** 84 **(D)** 90, **(E)** 100.

2) Quanti sono i numeri interi positivi n tali che n^3+2n^2+n sia un quadrato perfetto?
(A) Nessuno, **(B)** almeno 1, ma non più di 4, **(C)** almeno 5, ma non più di 9, **(D)** almeno 10 ma non più di 20, **(E)** nessuna delle precedenti.

3) Per quante coppie ordinate (a,b) di numeri interi accade che il loro prodotto sia uguale alla loro somma?
(A) Nessuna, **(B)** una, **(C)** due, **(D)** quattro, **(E)** più di quattro.

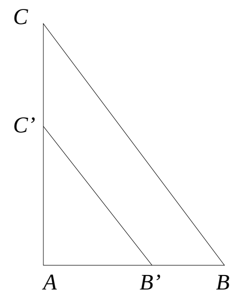
4) Quanti sono i numeri di 4 cifre la cui cifra iniziale è 1 e che hanno almeno 3 cifre uguali tra loro?
(A) 36, **(B)** 37, **(C)** 39, **(D)** 40, **(E)** nessuna delle precedenti.

5) In un triangolo, per ogni coppia di lati consecutivi, i due assi dei lati e la bisettrice dell'angolo formato dai due lati si incontrano in uno stesso punto. Possiamo affermare che:
(A) non esiste un triangolo con questa proprietà, **(B)** il triangolo è equilatero, **(C)** il triangolo ha un angolo di 30°, **(D)** il triangolo è rettangolo, **(E)** il triangolo ha un angolo di 45°.

6) Quanti sono i numeri naturali n tali che $2n$ divide $n+30$?
(A) uno, **(B)** due, **(C)** tre, **(D)** quattro, **(E)** più di quattro.

7) Fabio ritrova un suo vecchio lucchetto a combinazione; il lucchetto è chiuso e per aprirlo bisogna allineare nell'ordine giusto tre cifre, ciascuna delle quali può variare da 0 a 9. Fabio non ricorda la combinazione corretta, ma è sicuro che la somma delle tre cifre sia 10. Quanti tentativi dovrà fare, al massimo, per trovare la combinazione corretta?
(A) 61, **(B)** 63, **(C)** 65, **(D)** 67, **(E)** 69.

8) Il triangolo ABC è rettangolo ed i cateti AB e AC misurano 3 m e 4 m rispettivamente. Siano B' e C' punti appartenenti ai lati AB e AC rispettivamente, tali che la retta contenente il segmento $B'C'$ sia parallela a quella contenente il segmento BC e distante 1 m da essa (vedi figura). Calcolare l'area del triangolo $AB'C'$.
(A) $\frac{49}{24}$ m^2, **(B)** 2 m^2, **(C)** $\frac{65}{24}$ m^2, **(D)** $\frac{7}{2}$ m^2, **(E)** nessuna delle precedenti.



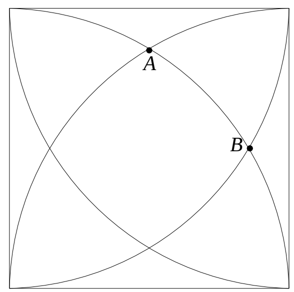
9) Quanti sono i numeri interi n tali che $n-52$ e $n+53$ siano due quadrati perfetti?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 8.

10) a e b sono due numeri reali tali che

$$2a^4-4ab+b^2+2=0\,.$$

Quanti valori distinti può assumere a?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** non esiste alcuna coppia (a,b) che verifica la condizione.

11) Nel quadrato in figura sono stati disegnati i quattro archi di circonferenza ciascuno avente centro in uno dei vertici del quadrato e raggio pari al lato del quadrato, che misura 10 m. Quanto vale la distanza tra A e B?
(A) $3(\sqrt{6}-1)$ m, **(B)** 5 m, **(C)** $5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m, **(D)** $8(\sqrt{3}-1)$ m, **(E)** nessuna delle precedenti.



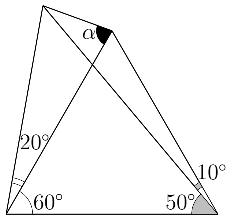
12) Una gara di matematica è composta da 10 domande a risposta multipla, ciascuna con quattro possibili risposte contrassegnate dalle lettere A, B, C e D (per ogni domanda vi è una e una sola risposta corretta). Carlo viene a sapere che la lista delle risposte corrette contiene tre lettere A, tre lettere B, due lettere C e due lettere D. Qual è la probabilità che Carlo, scegliendo a caso una lista che abbia

questa caratteristica, risponda correttamente a tutte le domande?
(A) 1/26500, **(B)** 1/25200, **(C)** 1/24600, **(D)** 1/21200, **(E)** 1/20800.

13) Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso).
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

14) Quanti numeri reali x risolvono l'equazione $|x-2|-4 = 1/|x-3|$?
(A) nessuno, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** più di quattro.

15) Nella figura qui a fianco, quanto misura l'angolo α?
(A) 70°, **(B)** 75°, **(C)** 80°, **(D)** 90°, **(E)** non può essere determinato coi soli dati forniti.

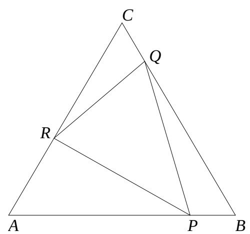


16) Andrea non ha fatto gli esercizi per casa e per punizione la maestra gli assegna come compito quello di scrivere sul quaderno tutti i numeri compresi tra 1 e 2005, estremi inclusi (ogni numero deve essere scritto una sola volta). Quante volte Andrea dovrà scrivere la cifra 1?
(A) 1490, **(B)** 1491, **(C)** 1600, **(D)** 1601, **(E)** 1610.

17) Un gruppo di ragazze e ragazzi, 24 in totale, partecipa ad un banchetto e siedono tutti intorno ad un tavolo rotondo. Ogni ragazza dice: "Seduto al mio fianco c'è un ragazzo". Sapendo che il numero di ragazze è il doppio di quello dei ragazzi, quante ragazze hanno certamente mentito?
(A) 0, **(B)** 4, **(C)** 8, **(D)** 16, **(E)** non è possibile rispondere in base ai soli dati forniti.

18) Il polinomio p è definito da $p(x) = ax^{2005} + x + b$, con a e b numeri reali. Per quali valori di a e b si ha che $p(x+1) - p(x-1) = p(x)$ per ogni valore reale di x?
(A) $a = 0, b = 2$, **(B)** a qualunque e $b = 0$, **(C)** $a = 1$ e b qualunque,
(D) $a = b = 0$, **(E)** per nessun valore di a e b.

19) Il triangolo ABC in figura è equilatero e ha lato 5 m. Sapendo che $AP = 4$ m, $BQ = 4$ m, $CR = 3$ m, calcolare il rapporto tra l'area del triangolo PQR e l'area del triangolo ABC.
(A) $\frac{2}{5}$, **(B)** $\frac{9}{25}$, **(C)** $\frac{11}{20}$, **(D)** $\frac{3}{7}$, **(E)** nessuna delle precedenti.



20) Una successione di numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ha questa proprietà: i primi due termini sono uguali a 1: $a_0 = a_1 = 1$, e, per ogni n maggiore o uguale a uno, $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$ (quindi, ad esempio, $a_2 = 1(a_1 + a_0) = 1 \cdot 2 = 2$). Con quale cifra termina a_{2005}?
(A) 0, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 8.

21) Quattro bambine, Alice, Bianca, Cecilia e Daniela, decidono di comprare un palloncino a testa da un venditore che ha solo palloncini rossi e blu. Compreranno il palloncino una dopo l'altra: prima Alice, poi Bianca, poi Cecilia e infine Daniela. Bianca dice: "Se Alice lo comprerà rosso, anch'io lo comprerò rosso". Cecilia dice: "Io lo comprerò dello stesso colore di Bianca". Daniela dice: "Se Alice lo comprerà blu, io lo comprerò dello stesso colore di Cecilia". Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?
(A) È impossibile che quattro bambine comprino un palloncino rosso, **(B)** almeno tre bambine compreranno un palloncino dello stesso colore, **(C)** Daniela e Bianca compreranno un palloncino dello stesso colore, **(D)** almeno due bambine compreranno un palloncino rosso, **(E)** nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.

22) Tra i triangoli rettangoli di area 6 m^2 quello di perimetro minimo ha l'ipotenusa di lunghezza
(A) 3 m, **(B)** $3\sqrt{3}$ m, **(C)** $2\sqrt{6}$ m, **(D)** $4\sqrt{3}$ m, **(E)** nessuna delle precedenti.

23) Quante parole (anche prive di senso compiuto) di quattro lettere si possono scrivere utilizzando solo le lettere A, B, E, M, O in modo che nessuna delle lettere successive ad una B (andando da sinistra verso destra) sia una M? (Quindi, ad esempio, $ABEB$ deve essere contata ma $OBAM$ no).
(A) $4^3 \cdot 5$, **(B)** $4^2 \cdot 5^2$, **(C)** $4 \cdot 5^3$, **(D)** 2^9, **(E)** 5^4.

24) Un tetraedro regolare il cui spigolo misura $6\sqrt{3}$ cm è appoggiato su di un piano p (cioè una faccia è contenuta in p); indichiamo con V il vertice che non appartiene a p. Il tetraedro viene ruotato di 90° mediante una rotazione che ha per asse la retta che contiene uno degli spigoli che poggiano su p. Calcolare a quale distanza dal piano p si trova il vertice V dopo la rotazione.
(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ cm, **(B)** $\frac{2}{3}$ cm, **(C)** 3 cm, **(D)** $3\sqrt{3}$ cm, **(E)** nessuna delle precedenti.

25) Sia
$$x = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2004 \cdot 2006}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2003 \cdot 2005}.$$
Allora:
(A) $x < \sqrt[4]{2006}$, **(B)** $\sqrt[4]{2006} < x < \sqrt[3]{2006}$, **(C)** $\sqrt[3]{2006} < x < \sqrt{2006}$,
(D) $\sqrt{2006} < x < 2006$, **(E)** $x > 2006$.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

22 novembre 2006

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome __________________ *Cognome* ____________________ *Classe* _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Laura sta leggendo un libro e nota che il numero della pagina a cui è arrivata è divisibile per 3, 4 e 5. Qual è la cifra delle unità del numero della pagina successiva?
(A) 1, **(B)** 3, **(C)** 5, **(D)** 6, **(E)** 9.

2) Claudia ha disegnato sul quaderno l'iniziale del suo nome, una C. Il disegno è stato fatto tagliando esattamente a metà una corona circolare con raggio interno 1 cm e raggio esterno 4 cm. Quanto misura il perimetro della C?
(A) 5 cm, **(B)** 5π cm, **(C)** $(6+5\pi)$ cm, **(D)** $(5+6\pi)$ cm, **(E)** $(6+10\pi)$ cm.

3) Il numero reale a è tale che l'equazione

$$x^2 + 2ax + 1 = 0$$

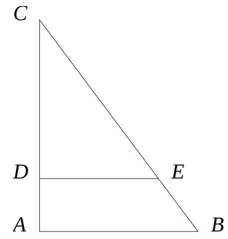
ha due soluzioni reali coincidenti. Quanti sono i possibili valori di a?
(A) Nessuno, **(B)** uno, **(C)** due, **(D)** tre, **(E)** quattro.

4) Quanti sono i multipli di 3 maggiori o uguali di 2000 e minori o uguali di 4000?
(A) 666, **(B)** 667, **(C)** 668, **(D)** 669, **(E)** 670.

5) In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 3 m e 12 m rispettivamente. Quanto misura l'area del triangolo?
(A) 45 m^2, **(B)** 60 m^2, **(C)** 72 m^2, **(D)** 84 m^2, **(E)** 90 m^2.

6) Francesco è interessato a un modello di televisore che viene venduto nei supermercati Landscape a 800 Euro. Si accorge poi che nei negozi Ipersfera vendono lo stesso modello al 15% in meno e praticano uno sconto del 10% a tutti i clienti di nome Francesco. Quanto spende acquistando il televisore nei negozi Ipersfera?
(A) 600 Euro, **(B)** 612 Euro, **(C)** 680 Euro, **(D)** 720 Euro, **(E)** 790 Euro.

7) Nella figura a fianco, il segmento DE è parallelo ad AB. Sapendo che l'area di DEC è uguale ai $\frac{3}{4}$ di quella di ABC e che AC misura 1 m, quanto misura DC?
(A) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ m, **(B)** $(2-\sqrt{3})$ m, **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m,
(D) $\frac{3}{4}$ m, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.



8) Quanti divisori positivi ha $6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$? (Tra i divisori di un numero devono essere contati anche 1 e il numero stesso.)
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 10, **(D)** 24, **(E)** 30.

9) Le misure delle diagonali di un rombo sono l'una i $\frac{3}{4}$ dell'altra e la loro somma è 56 m. Calcolare il perimetro del rombo.
(A) 60 m, **(B)** 80 m, **(C)** 96 m, **(D)** 100 m, **(E)** 108 m.

10) Mettere in ordine crescente i tre numeri $2\sqrt[6]{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$.
(A) $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[6]{2}$, **(B)** $\sqrt[3]{11} < 2\sqrt[6]{2} < \sqrt{5}$, **(C)** $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < 2\sqrt[6]{2}$,
(D) $\sqrt{5} < 2\sqrt[6]{2} < \sqrt[3]{11}$, **(E)** $2\sqrt[6]{2} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{11}$.

11) In una scacchiera 8×8 le righe e le colonne sono numerate da 1 a 8. Su ogni casella Mauro appoggia dei gettoni secondo questa regola: guarda il numero di riga e di colonna corrispondenti alla casella, li somma e mette sulla casella tanti gettoni quanto è il risultato della somma. Quanti gettoni appoggia in tutto sulla scacchiera?
(A) 482, **(B)** 576, **(C)** 768, **(D)** 1024, **(E)** 1152.

12) Ogni ora il patrimonio di zio Paperone aumenta del 50%. Se alle 12 di un certo giorno Paperone possiede 64 fantastiliardi, quale sarà il suo patrimonio alle 16 dello stesso giorno?
(A) 192 fantastiliardi, **(B)** 256 fantastiliardi, **(C)** 324 fantastiliardi,
(D) 486 fantastiliardi, **(E)** 1024 fantastiliardi.

13) Tra i 200 alunni di una scuola, 150 hanno partecipato ad una gara di chimica e 130 hanno partecipato ad una gara di fisica. Quanti studenti hanno partecipato ad entrambe le gare?
(A) 70, **(B)** 80, **(C)** 120, **(D)** 130, **(E)** non è possibile determinarne il numero in base ai dati del problema.

14) Gigi dispone su un tavolo sei gettoni rossi, tondi, uguali tra loro e di raggio 10 cm, in modo che si tocchino a due a due senza sovrapporsi e che i loro centri siano disposti sui vertici di un esagono regolare. Poi nota che in mezzo c'è ancora spazio per appoggiare un gettone blu, tondo, in modo che tocchi tutti e sei i gettoni rossi senza sovrapporvisi. Qual è il raggio del gettone blu?
(A) $5\sqrt{3}$ cm, **(B)** 10 cm, **(C)** $10\sqrt{3}$ cm, **(D)** $15\sqrt{3}$ cm, **(E)** 20 cm.

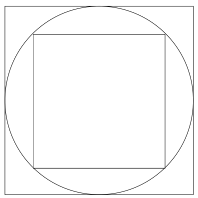
15) Quante soluzioni reali ha l'equazione

$$\Big|\big||a|+3\big|-2\Big| = 1\ ?$$

(A) Nessuna, **(B)** una, **(C)** due, **(D)** tre, **(E)** otto.

16) Andrea entra in un negozio con la somma di denaro esatta per comprare una caramella per ciascuno dei suoi compagni di classe, al prezzo di tredici centesimi l'una. Il prezzo delle caramelle però è sceso a dieci centesimi l'una e Andrea compra sei caramelle in più del previsto, finendo il denaro che aveva. Quanti sono i compagni di classe di Andrea?
(A) 18, **(B)** 20, **(C)** 21, **(D)** 23, **(E)** 24.

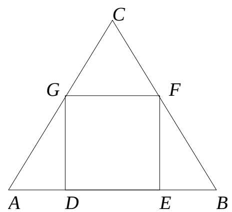
17) Nella figura a fianco, chiamiamo Q il quadrato circoscritto alla circonferenza e Q' il quadrato inscritto nella circonferenza. Quanto vale il rapporto tra l'area di Q e quella di Q'?
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(B)** $\sqrt{2}$, **(C)** 2, **(D)** $2\sqrt{2}$, **(E)** 4.



18) In quanti modi distinti si possono ordinare le lettere I, S, O, L, A, in modo che non vi siano due consonanti consecutive?
(A) 60, **(B)** 72, **(C)** 84, **(D)** 96, **(E)** 120.

19) Gli abitanti di un'isola si dividono in due categorie: quelli che sono sempre sinceri e quelli che mentono sempre. Fra tre abitanti dell'isola, Andrea, Barbara e Ciro, avviene questa conversazione: Andrea dice: "Barbara è sincera", Barbara dice: "Andrea e Ciro sono sinceri", Ciro dice: "Andrea è bugiardo". Possiamo concludere che
(A) sono tutti e tre sinceri, **(B)** sono tutti e tre bugiardi, **(C)** Andrea e Barbara sono sinceri e Ciro è bugiardo, **(D)** Andrea e Barbara sono bugiardi e Ciro è sincero, **(E)** Andrea è sincero e Ciro e Barbara sono bugiardi.

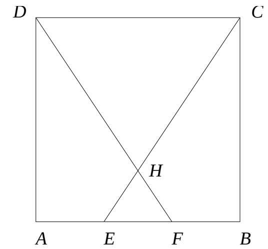
20) Nella figura a fianco il triangolo ABC è equilatero e ha lato 1 m e $DEFG$ è un quadrato. Quanto misura il lato DE?
(A) $\frac{1}{3}$ m, **(B)** $(2\sqrt{3}-3)$ m, **(C)** $\frac{1}{2}$ m,
(D) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ m, **(E)** $(\sqrt{3}-1)$ m.



21) Qual è la cifra delle unità di 17^{17}?
(A) 1, **(B)** 3, **(C)** 5, **(D)** 7, **(E)** 9.

22) Un vandalo taglia tutti i copertoni delle auto e delle motociclette parcheggiate lungo una strada. La polizia lo arresta e rileva che i veicoli danneggiati sono 44. Il responsabile viene condannato a pagare le spese di sostituzione dei 144 copertoni da lui tagliati. Quante motociclette erano parcheggiate in quella strada?
(A) Meno di 9, **(B)** più di 10 e meno di 14, **(C)** più di 15 e meno di 19, **(D)** più di 20 e meno di 24, **(E)** più di 25.

23) Nel quadrato $ABCD$, avente il lato lungo 12 m, il lato AB viene diviso in tre segmenti AE, EF e FB di uguale lunghezza. Si tracciano i segmenti EC e FD che si intersecano nel punto H. Quanto è l'area del triangolo HCD?
(A) 36 m^2, **(B)** 48 m^2, **(C)** 54 m^2, **(D)** 60 m^2, **(E)** 72 m^2.



24) Il numero 100020001 è:
(A) un numero primo, **(B)** un quadrato perfetto, **(C)** un multiplo di tre, **(D)** un cubo perfetto, **(E)** un multiplo di undici.

25) Sia Q un cubo e sia S una sfera che ha centro in uno dei vertici di Q e raggio uguale al lato di Q. Il volume dell'intersezione tra Q e S è:
(A) un ottavo del volume della sfera, **(B)** un quarto del volume della sfera, **(C)** un sesto del volume del cubo, **(D)** un quarto del volume del cubo, **(E)** metà del volume del cubo.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

21 novembre 2007

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ________________ *Cognome* __________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Un calciatore riceve un compenso annuale di 6.000.000 Euro per il 2007. La durata di tempo in cui egli guadagna 1000 Euro è:
(A) minore di mezz'ora, **(B)** compresa tra mezz'ora e un'ora, **(C)** compresa tra un'ora e due ore, **(D)** compresa tra due ore e quattro ore, **(E)** maggiore di quattro ore.

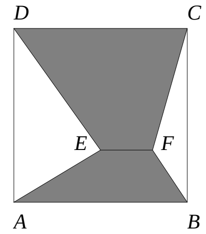
2) Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto tra la lunghezza di un lato del quadrato e quella di un lato del triangolo?
(A) $\frac{1}{2}$, **(B)** $\frac{2}{3}$, **(C)** $\frac{3}{4}$, **(D)** 1, **(E)** $\frac{8}{3}$.

3) Un giornale costa 0,90 Euro; a chi lo acquista viene offerto un supplemento facoltativo del costo di 1,50 Euro. A fine giornata sono state vendute 333 copie del giornale e l'incasso complessivo della vendita del giornale e dei relativi supplementi è stato di 539,70 Euro. Quanti supplementi sono stati acquistati?
(A) Non più di 66, **(B)** più di 67 e meno di 132, **(C)** più di 133 e meno di 200, **(D)** più di 201 e meno di 266, **(E)** più di di 266.

4) Se a e b sono due numeri tali che $a + b > 0$ e $a \cdot b < 0$, quale delle affermazioni seguenti è certamente vera?
(A) $a > 0$ e $b < 0$, **(B)** $a < 0$ e $b < 0$, **(C)** $a > 0$ e $b > 0$, **(D)** a e b hanno segno diverso e tra i due quello positivo ha valore assoluto maggiore, **(E)** a e b hanno segno diverso e tra i due quello negativo ha valore assoluto maggiore.

5) Il numero $\sqrt[3]{54} + \sqrt[6]{4}$ è uguale a:
(A) $\sqrt[18]{58}$, **(B)** $\sqrt[9]{54 \cdot 4}$, **(C)** $\sqrt[6]{112}$, **(D)** $\sqrt[3]{56}$, **(E)** $4\sqrt[3]{2}$.

6) Il quadrato $ABCD$ disegnato a fianco ha il lato lungo 3 m. Il segmento EF è lungo 1 m ed è parallelo ad AB. Quanto vale l'area dell'esagono $ABFCDE$?
(A) $5\,\mathrm{m}^2$, **(B)** $5,5\,\mathrm{m}^2$, **(C)** $6\,\mathrm{m}^2$, **(D)** $7\,\mathrm{m}^2$, **(E)** $7,5\,\mathrm{m}^2$.



7) Una corsa in montagna di 13 km è stata vinta da un podista che ha impiegato 51 minuti per concludere la prova. Paolo, 57° classificato, ha impiegato 1 ora e 18 minuti. Ammettendo che Paolo abbia corso con velocità costante, a quale distanza dall'arrivo si trovava mentre il vincitore tagliava il traguardo?
(A) 3750 m, **(B)** 4000 m, **(C)** 4250 m, **(D)** 4500 m, **(E)** 4750 m.

8) Il numero $\dfrac{2^{101} + 2^{93}}{2^{86} + 2^{78}}$ è uguale a:
(A) $2^7 \cdot 5$, **(B)** 2^{13}, **(C)** $2^{13} \cdot 3$, **(D)** 2^{15}, **(E)** $2^{15} \cdot 17$.

9) Sul pianeta Uru le settimane durano 8 giorni, i mesi (tutti indistintamente) durano 34 giorni e in un anno ci sono 14 mesi. Quando il primo giorno dell'anno cade di domenica (ultimo giorno della settimana) si celebra la Festa del Pianeta. Sapendo che oggi su Uru è la Festa del Pianeta, tra quanti giorni sarà la prossima?
(A) 238, **(B)** 476, **(C)** 952, **(D)** 1428, **(E)** 1904.

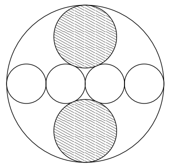
10) In un triangolo ABC scegliamo un punto D su AB e un punto E su AC in modo che la lunghezza di AD sia un terzo di quella di AB e la lunghezza di AE sia un terzo di quella di AC. Sapendo che l'area del triangolo ADE è $5\,\mathrm{m}^2$, determinare l'area del quadrilatero $BCED$.
(A) $10\,\mathrm{m}^2$, **(B)** $20\,\mathrm{m}^2$, **(C)** $25\,\mathrm{m}^2$, **(D)** $30\,\mathrm{m}^2$, **(E)** $40\,\mathrm{m}^2$.

11) In un paese abitano solo briganti, che mentono sempre, e cavalieri, che dicono sempre la verità. Un giornalista intervista quattro abitanti: Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni. Arturo: "Bernardo è un brigante"; Bernardo: "Io sono l'unico cavaliere tra noi quattro"; Carlo: "Almeno uno tra Arturo e Dario è un brigante"; Dario: "Siamo 4 cavalieri". Quanti tra i quattro sono cavalieri?
(A) Nessuno, **(B)** uno, **(C)** due, **(D)** tre, **(E)** quattro.

12) Un produttore di dentifricio riduce di 20 grammi il contenuto di ciascun tubetto di dentifricio e ne lascia invariato il prezzo. Egli calcola che in questo modo il prezzo di un chilo di dentifricio aumenterà del 25%. Quanto dentifricio conteneva ciascun tubetto prima della riduzione?
(A) 100 g, **(B)** 120 g, **(C)** 125 g, **(D)** 150 g, **(E)** 160 g.

13) Quanto vale il resto della divisione di $10(2007)^4 - 8(2007)^3 + 12(2007)^2 + 721$ per 669?
(A) 0, **(B)** 52, **(C)** 104, **(D)** 223, **(E)** 446.

14) Nella figura a fianco il raggio del cerchio più grande misura 20 cm. Quanto misura il raggio dei cerchi colorati in grigio?
(A) 5 cm, **(B)** 6 cm, **(C)** 8 cm, **(D)** 9 cm, **(E)** 10 cm.

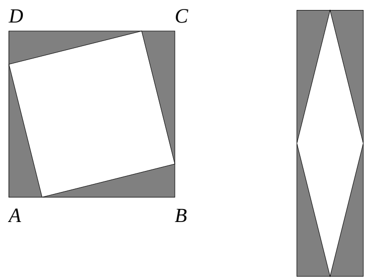


15) Il professor Victor tiene un corso a 10 studenti e all'inizio di ogni lezione compila il foglio del presenze scrivendo "presente" oppure "assente" a fianco del nome di ciascuno studente. Quanti sono i possibili fogli delle presenze distinti?
(A) 10^2, **(B)** $2^2 + 2^3 + 2^4$, **(C)** 10^3, **(D)** 2^{10}, **(E)** 10^4.

16) Andrea percorre una strada rettilinea alla velocità costante di 6 km/h; Marco percorre a velocità costante una strada parallela a quella di Andrea, distante da essa 12 m, in direzione opposta. Tra le due strade si trova un palo che dista 3 m dalla strada su cui è Andrea. Sapendo che in ogni istante il palo è allineato con le posizioni di Andrea e Marco, a che velocità si sta muovendo Marco?
(A) 2 km/h, **(B)** 3 km/h, **(C)** 12 km/h, **(D)** 18 km/h, **(E)** 20 km/h.

17) Quanti tra i numeri 2, 3, 5, 7 e 11 dividono $371^4 - 41^4$?
(A) uno, **(B)** due, **(C)** tre, **(D)** quattro, **(E)** cinque.

18) Disponendo quattro triangoli rettangoli identici come nella figura di sinistra l'area del quadrato bianco è 17 m^2. Disponendoli invece come nella figura di destra, l'area del rombo bianco è 8 m^2. Quanto vale l'area del quadrato $ABCD$?
(A) 19 m^2, **(B)** 24 m^2, **(C)** 25 m^2, **(D)** 32 m^2, **(E)** 36 m^2.



19) Claudio e Filippo hanno ciascuno una scacchiera con R righe e C colonne e hanno P pedine ciascuno. Claudio dispone tutte le sue pedine sulla propria scacchiera (ciascuna in una casella) in modo che 8 righe restino completamente vuote e ciascuna delle altre righe abbia esattamente 9 caselle vuote. Filippo dispone tutte le sue pedine sulla propria scacchiera (ciascuna in una casella) in modo che 12 righe restino completamente vuote e ciascuna delle altre righe abbia esattamente 6 caselle vuote. Quanto vale $\frac{C}{R}$?
(A) $\frac{3}{4}$, **(B)** 1, **(C)** $\frac{4}{3}$, **(D)** $\frac{5}{4}$, **(E)** 2.

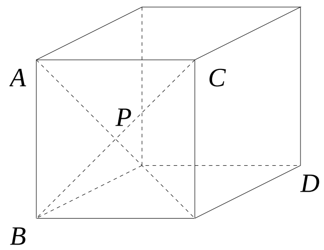
20) Alberto deve apparecchiare una tavola rotonda per sei persone e ha sei piatti bianchi e sei piatti neri a disposizione. Per ogni persona deve mettere uno e un solo piatto e può sceglierlo, arbitrariamente, di colore bianco oppure nero. Quanti modi distinti ha Alberto di apparecchiare la tavola? (Due tavole apparecchiate che differiscono solo per una rotazione non sono da considerarsi distinte).
(A) 12, **(B)** 13, **(C)** 14, **(D)** 16, **(E)** 18.

21) Qual è la sesta cifra decimale dopo la virgola del numero $\frac{13^7 + \sqrt{3}}{10^5}$?
(A) 0, **(B)** 3, **(C)** 6, **(D)** 7, **(E)** 8.

22) Dopo la scuola Francesco invita i suoi amici a casa sua per studiare e fare merenda e dice: "Se saremo in pochi studieremo bene; se saremo in tanti mangeremo poco". Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera secondo Francesco?
(A) Se si è in pochi si mangia molto, **(B)** per studiare bene è necessario essere in pochi, **(C)** se si studia male non si è in pochi, **(D)** se si mangia poco si è necessariamente in tanti, **(E)** se si è in tanti si studia male.

23) Due triangoli equilateri hanno il baricentro in comune e l'uno si ottiene dall'altro con una rotazione di 30 gradi. L'area della loro intersezione rappresenta una percentuale dell'area di uno dei triangoli che è:
(A) compresa tra il 50% e il 60%, **(B)** compresa tra il 60% e il 70%, **(C)** compresa tra il 70% e l'80%, **(D)** compresa tra l'80% e il 90%, **(E)** compresa tra il 90% e il 100%.

24) A, B, C e D sono quattro dei vertici di un cubo, come in figura, e il punto P è il centro della faccia che ha come vertici A, B e C. Il piano passante per A, P e D divide il cubo in due parti. Qual è il rapporto tra il volume della parte che contiene B e quello della parte che contiene C?
(A) 1/2, **(B)** 1, **(C)** 3/2, **(D)** 2, **(E)** 3.



25) In una classe ci sono 9 alunni e uno di loro, Antonio, esce ogni giorno con un gruppo diverso di compagni di classe e ogni volta che esce ciascuno dei componenti del gruppo con cui si trova gli dà un Euro. Quanti Euro avrà guadagnato Antonio al termine di tutte le possibili scelte distinte di gruppi con cui uscire?
(A) $2^7 \cdot 7$, **(B)** $2^3 \cdot 5^3$, **(C)** 2^{10}, **(D)** 2^{11}, **(E)** $2^8 \cdot 3^2$.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

19 novembre 2008

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ______________ *Cognome* ______________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h. A causa di alcuni problemi tecnici impiega 40 minuti per percorrere i primi 25 km. A quale velocità deve percorrere il resto del percorso (andando a velocità costante) per riuscire nel suo intento?
(A) Nessuna velocità glielo consente, **(B)** 50 km/h, **(C)** 100 km/h, **(D)** 150 km/h, **(E)** 200 km/h.

2) Alberto, Barbara e Clara giocano in un grande piazzale dove ci sono 2008 birilli. Alberto butta giù il triplo dei birilli buttati giù da Barbara, che a sua volta butta giù il doppio dei birilli buttati giù da Clara. Quanti birilli al massimo può aver buttato giù Alberto?
(A) 1321, **(B)** 1338, **(C)** 1342, **(D)** 1353, **(E)** 1362.

3) Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 Euro. Con grande generosità però, gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 Euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo?
(A) 6, **(B)** 8, **(C)** 10, **(D)** 12, **(E)** 16.

4) Su Marte, il Gran Ciambellano dell'Istruzione Marziana ha dichiarato che il prossimo anno scolastico ridurrà del 30% il numero dei maestri di scuola e che a coloro che rimarranno in servizio lo stipendio sarà aumentato del 35%. La spesa complessiva per gli stipendi dei maestri quindi:
(A) si ridurrà del 5,5%, **(B)** si ridurrà del 5%, **(C)** aumenterà del 5%, **(D)** resterà invariata, **(E)** aumenterà del 7%.

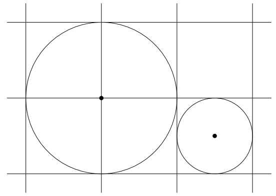
5) In un triangolo rettangolo ABC i cateti BC e CA misurano 7 cm e 24 cm rispettivamente. Sia H la proiezione di C sull'ipotenusa AB. Quanto vale il perimetro del triangolo HBC?
(A) $\frac{262}{25}$ cm, **(B)** $\frac{501}{49}$ cm, **(C)** $\frac{392}{25}$ cm, **(D)** $\frac{801}{49}$ cm, **(E)** $\frac{412}{25}$ cm.

6) Per quanti valori distinti del numero reale b l'equazione

$$x^2 + bx - 16 = 0\,,$$

ha due soluzioni reali (eventualmente coincidenti) e queste sono entrambe numeri interi?
(A) Due, **(B)** tre, **(C)** quattro, **(D)** cinque, **(E)** sei.

7) In un foglio a quadretti in cui il lato di un quadretto è 2 cm, sono disegnati due cerchi come nella figura a fianco. La misura della minima distanza tra i due cerchi è:
(A) $\sqrt{10}$ cm, **(B)** 3 cm, **(C)** $(\sqrt{10}+3)$ cm, **(D)** $(\sqrt{10}-2)$ cm, **(E)** $(\sqrt{10}-3)$ cm.



8) Per ogni numero naturale n indichiamo con S_n la somma dei primi dieci multipli di n: ad esempio $S_2 = 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$. Quanto vale $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{10}$?
(A) 2925, **(B)** 3025, **(C)** 3125, **(D)** 3225, **(E)** 3325.

9) Un quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari tra loro ed è inscritto in una circonferenza c di diametro AC. L'area e il perimetro del quadrilatero sono rispettivamente 48 cm^2 e 28 cm. Quanto misura il raggio della circonferenza c?
(A) 4 cm, **(B)** 5 cm, **(C)** 6 cm, **(D)** 7 cm, **(E)** 8 cm.

10) Uno studente di Fibonacci inventò una sequenza di numeri definita in questo modo: il primo e il secondo numero della sequenza sono 0 e 1 rispettivamente; ogni numero della sequenza, dal terzo in poi, è pari alla somma di tutti i numeri che lo precedono (lui escluso!). Qual è il quindicesimo numero della sequenza?
(A) 377, **(B)** 2084, **(C)** 2584, **(D)** 3012, **(E)** 4096.

11) n e m sono due numeri interi positivi per cui: $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} = m + n\sqrt{2}$. Quanto vale $m+n$?
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 5, **(D)** 6, **(E)** 7.

12) La media aritmetica di ventisette numeri naturali consecutivi è 2008. Quanto vale il più piccolo tra essi?
(A) 1995, **(B)** 1997, **(C)** 1999, **(D)** 2001, **(E)** 2004.

13) Sia N il più grande tra i numeri naturali n che verificano la disuguaglianza

$$\frac{n}{n+1} < \frac{6024}{6027}\,.$$

Qual è la somma delle cifre di N?
(A) 6, **(B)** 7, **(C)** 8, **(D)** 9, **(E)** 10.

14) Quante sono le terne ordinate distinte (x, y, z) formate da numeri interi positivi (strettamente maggiori di zero) tali che

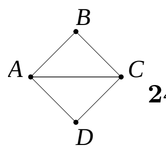
$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 9\ ?$$

(A) Nessuna, **(B)** due, **(C)** tre, **(D)** quattro, **(E)** più di sei.

15) Quanti sono i numeri interi positivi multipli di almeno uno tra 5 e 7 e minori o uguali a 1000?
(A) 288, **(B)** 302, **(C)** 314, **(D)** 342, **(E)** 382.

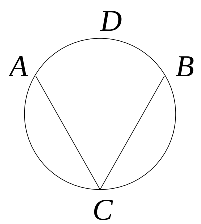
16) In un sacchetto ci sono 20 palline e su ciascuna è scritto un numero intero compreso tra 0 e 10 (0 e 10 inclusi). Il numero scritto su ogni pallina se non è zero è la somma dei numeri scritti su tutte le altre palline. Allora le palline su cui è scritto zero sono:
(A) non più di cinque, **(B)** dieci, **(C)** tredici, **(D)** sedici, **(E)** almeno diciotto.

17) La figura a fianco è la pianta di un quartiere: i punti A, B, C e D sono le case e i segmenti sono le strade. Da quante delle quattro case è possibile partire per fare un percorso che passi una e una sola volta da ogni strada (passando eventualmente più di una volta per una stessa casa)?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

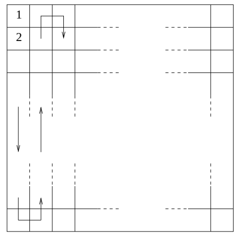


18) La somma di tutti i numeri naturali formati da due cifre distinte è:
(A) 3840, **(B)** 3960, **(C)** 4140, **(D)** 4260, **(E)** 4410.

19) Il raggio della circonferenza a fianco è di 5 cm; inoltre i punti A, B e C dividono la circonferenza in tre archi di uguale lunghezza. Calcolare l'area delimitata dalle corde AC e BC e dall'arco di estremi A e B contenente D.
(A) $25(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ cm^2, **(B)** $25(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3})$ cm^2, **(C)** $15(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ cm^2, **(D)** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2, **(E)** $\frac{25}{2}(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}/2)$ cm^2.



20) Le caselle di una scacchiera quadrata sono numerate come illustrato nella figura a fianco. Nella seconda colonna si trova la casella numero 38 e la casella della terza colonna che sta sulla sua stessa riga ha il numero 43. Quante caselle ha la scacchiera?
(A) 144, **(B)** 160, **(C)** 225, **(D)** 400, **(E)** 625.



21) Ogni volta che Agilulfo torna a casa da scuola dopo aver preso un brutto voto, se la sua mamma è in casa lo mette in punizione. Sapendo che ieri pomeriggio Agilulfo non è stato messo in punizione, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) ieri Agilulfo ha preso un brutto voto, **(B)** ieri Agilulfo non ha preso un brutto voto, **(C)** ieri pomeriggio la sua mamma era in casa, **(D)** ieri pomeriggio la sua mamma non era in casa, **(E)** nessuna delle precedenti affermazioni è certamente vera.

22) La Polisportiva "I tropici" ha organizzato un torneo di calcio a cui partecipano 3 squadre ciascuna composta da 15 giocatori (riserve comprese) con maglie numerate da 1 a 15. La notte prima delle partite ha nevicato e per poter giocare è necessario spalare la neve dal campo. Viene deciso allora di nominare un gruppo di 3 spalatori scegliendo un giocatore per squadra in modo che non ci siano due giocatori con lo stesso numero di maglia. In quanti modi diversi può essere formato il gruppo degli spalatori?
(A) 48, **(B)** 455, **(C)** 1125, **(D)** 2730, **(E)** 3375.

23) Su un foglio del quaderno di Carlo c'è un rettangolo con due lati gialli di 24 cm e due lati rossi di 36 cm. Carlo colora ogni punto del rettangolo dello stesso colore del lato più vicino al punto stesso. Quale sarà l'area della parte del rettangolo colorata di giallo?
(A) 144 cm^2, **(B)** 288 cm^2, **(C)** 364 cm^2, **(D)** 442 cm^2, **(E)** 524 cm^2.

24) C e T sono rispettivamente un cono e un cilindro circolari retti, che hanno lo stesso asse e hanno le basi nello stesso piano (e sono rivolti dalla stessa parte rispetto a questo piano). L'area di base di C misura $400\,\pi$ cm^2 mentre il raggio di base di T misura 10 cm. Inoltre le altezze di C e T misurano entrambe 20 cm. Quale percentuale del volume di C è contenuta dall'intersezione tra C e T?
(A) $20\sqrt{2}$ %, **(B)** 40 %, **(C)** 50 %, **(D)** 60 %, **(E)** $50\sqrt{2}$ %.

25) Giovanni vuole disegnare un quadrato formato da nove caselle (tre caselle per lato) e scrivere in ogni casella un numero a scelta tra 0, 1, 2, 3, 4, in modo che fissata comunque una riga, una colonna o una diagonale del quadrato, la somma dei numeri presenti nelle sue caselle sia sempre uguale a 4. Quanti diversi quadrati può costruire?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

18 novembre 2009

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Quale dei seguenti numeri è un divisore di $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
(A) 42, **(B)** 45, **(C)** 52, **(D)** 85, **(E)** 105.

2) La ruota anteriore della bicicletta di Chiara ha il raggio di 28 cm, mentre la ruota posteriore ha il raggio di 16 cm. Al termine di una gita in bicicletta la ruota anteriore ha fatto 10000 giri; quanti ne ha fatti la ruota posteriore nella stessa gita?
(A) 12000, **(B)** 14500, **(C)** 17500, **(D)** 19000, **(E)** 21000.

3) Su Venere, nell'anno venusiano 33, Eva e Greta si incontrano ai giardini. Eva dice a Greta: "Io ho solo 153 figli, ma alla fine di quest'anno la somma delle loro età sarà maggiore di 100 anni della somma delle età dei tuoi figli, che pure sono 180!". Durante quale anno venusiano la somma delle età dei figli di Greta supererà quella dei figli di Eva?
(A) 37, **(B)** 38, **(C)** 39, **(D)** 40, **(E)** 41.

4) Una pulce si trova sul numero 12 del quadrante di un orologio. Sceglie un numero naturale n compreso tra 1 e 12, estremi inclusi, e comincia a fare salti di n numeri sul quadrante, in senso orario (se ad esempio $n = 3$, dopo il primo salto è sul 3, dopo il secondo è sul 6 e così via). Dopo 12 salti, per la prima volta si ritrova sul numero 12 del quadrante. In quanti modi distinti può aver scelto n?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 12.

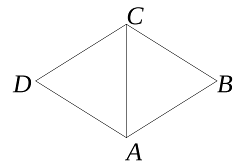
5) Disegno un triangolo equilatero e un esagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e quella dell'esagono?
(A) $\frac{1}{2}$, **(B)** $\frac{1}{3}$, **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **(E)** $\frac{1}{6}$.

6) Alla fine dell'anno scorso in una scuola si è diplomato il 18% degli studenti di tutta la scuola e un altro 3% degli studenti si è trasferito in altre scuole. Quest'anno si sono iscritti alla scuola 84 nuovi studenti e ora il numero di studenti è uguale a quello delle scorso anno. Quanti studenti ha la scuola?
(A) 324, **(B)** 400, **(C)** 500, **(D)** 525, **(E)** 600.

7) Quanti quadrati perfetti dividono 1600? [Un quadrato perfetto è un numero del tipo n^2, con n è un numero naturale. 1, 4, 9, 16, sono esempi di quadrati perfetti.]
(A) 2, **(B)** 4, **(C)** 8, **(D)** 10, **(E)** 12.

8) La piccola Rita fa questo gioco: per ogni numero intero compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, sottrae la cifra delle unità da quella delle decine e scrive il risultato su un foglio (ad esempio per 21 scrive 1, cioè $2 - 1$, mentre per 37 scrive -4, cioè $3 - 7$). Alla fine somma tutti i numeri che ha scritto sul foglio; quale risultato trova?
(A) 0, **(B)** -30, **(C)** 45, **(D)** -50, **(E)** 100.

9) Nel rombo in figura, i triangoli ABC e ACD sono equilateri ed hanno lato di lunghezza 1 m. Se ruotiamo il rombo di 60° rispetto al vertice A, qual è l'area della superficie coperta dal rombo nella rotazione?



(A) $\frac{\pi}{2}$ m^2, **(B)** 1 m^2, **(C)** π m^2, **(D)** $\frac{\pi}{3}$ m^2, **(E)** 2 m^2.

10) In una classe si è svolta una verifica di matematica e il voto medio è stato 7. Inoltre il voto medio dei maschi è stato 6,5 mentre quello delle femmine è stato 8. Se i maschi della classe sono 10, quante sono le femmine?
(A) 4, **(B)** 5, **(C)** 7, **(D)** 9, **(E)** 11.

11) La faccia nascosta della luna è popolata solo da furfanti, che mentono sempre, cavalieri che dicono sempre il vero, e paggi, che quando pronunciano due frasi consecutive, mentono su una e dicono il vero nell'altra, scegliendo in modo casuale l'ordine tra le due. Tre abitanti, Drago, Ludovico e Orlando, fanno le seguenti affermazioni. Drago: "Io sono un paggio. Ludovico è un cavaliere". Ludovico: "Orlando è un paggio. Io sono un furfante". Orlando: "Io sono un paggio. Siamo tutti paggi!". Quanti di loro sono effettivamente paggi?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** non si può determinare con i dati a disposizione.

12) Una moneta d'oro è circondata da quattro monete d'argento uguali tra loro. Ogni moneta d'argento è tangente alla moneta d'oro e a due monete d'argento. Trovare

il rapporto tra il raggio della moneta d'oro e quello delle monete d'argento.
(A) $\frac{1}{4}$, **(B)** $\sqrt{2}-1$, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(E)** 1.

13) a e b sono due numeri maggiori o uguali a zero. Sappiamo che: $a^3 + a < b - b^3$. Qual è l'ordine corretto tra i tre numeri a, b e 1?
(A) $b < a < 1$, **(B)** $a = b = 1$, **(C)** $a < 1 < b$, **(D)** $a < b < 1$,
(E) $1 < a < b$.

14) Carla si è dimenticata la password di accensione del suo nuovissimo computer! Si ricorda però che è una sequenza di 4 vocali, non necessariamente distinte, di cui due sono maiuscole e due sono minuscole. Quante password diverse deve provare Carla, al massimo, per accendere il computer?
(A) $3 \cdot 5^4$, **(B)** 5^5, **(C)** $6 \cdot 5^4$, **(D)** 5^6, **(E)** $3 \cdot 5^6$.

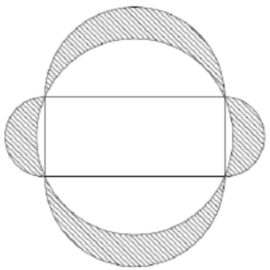
15) Sulla mia lavagna sono scritti alcuni numeri interi positivi, non necessariamente distinti. Se li sommo trovo 83, se li moltiplico trovo 1024. Qual è il più piccolo dei numeri scritti sulla mia lavagna?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 8, **(E)** 16.

16) Quale numero si ottiene sommando tutti i numeri formati da quattro cifre distinte, in cui ciascuna cifra può essere solo 1, 2, 3 oppure 6?
(A) 79992, **(B)** 13332, **(C)** 123456, **(D)** 100000, **(E)** 63210.

17) Davide e Golia abitano in un palazzo la cui pianta è un pentagono regolare di lato 10 metri. Il portone del palazzo è posto in uno dei vertici del pentagono e il palazzo è circondato, nel raggio di alcuni chilometri, da terreno piatto. Golia ruba la fionda di David, esce dal portone, percorre non più di 20 metri (senza rientrare nel palazzo) e lascia la fionda per terra. Quanto misura la superficie in cui David dovrà cercare, al massimo, prima di ritrovare la sua fionda?
(A) 320π m^2, **(B)** 160π m^2, **(C)** $100(4\pi - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ m^2,
(D) $100(2\pi + \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ m^2, **(E)** 280π m^2.

18) Qual è la seconda cifra, partendo da sinistra, del numero $(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

19) Disegniamo un rettangolo di lati 5 cm e 12 cm, la circonferenza in cui è inscritto e le semicirconferenze che hanno per diametro i lati del rettangolo e sono esterne ad esso, come indicato nella figura a fianco. Qual è l'area della parte ombreggiata?
(A) 45 cm^2, **(B)** 13π cm^2, **(C)** 19π cm^2,
(D) 60 cm^2, **(E)** 20π cm^2.



20) Qual è la cifra delle unità del numero: $\dfrac{66^{66}}{2}$?
(A) 1, **(B)** 3, **(C)** 6, **(D)** 8, **(E)** 9.

21) Per quanti numeri naturali n, sia n che $(n-6)^2+1$ sono primi?
(A) 1, **(B)** 3, **(C)** 4, **(D)** 7, **(E)** più di 8.

22) Gabriele ha dieci cubi, di tre dimensioni: alcuni hanno lato di 3 cm, altri il lato di 4 cm e altri ancora hanno il lato di 5 cm (ne ha almeno uno di ciascun tipo). La somma dei volumi dei dieci cubi è 577 cm^3. Quanti sono i cubi con il lato di 3 cm?
(A) 2, **(B)** 3, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.

23) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa. Anna dice: "Io ho un poker!" (quattro carte dello stesso valore). Bea dice: "Io ho tutte e cinque le carte di cuori". Caio dice: "Io ho cinque carte rosse". Infine Dino dice: "Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno tra loro lo stesso valore". Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?
(A) Anna, **(B)** Bea, **(C)** Caio, **(D)** Dino, **(E)** non è possibile determinarlo.

24) Una formica si trova su un vertice di un cubo. Si muove percorrendo gli spigoli del cubo in modo da passare una e una sola volta da ciascun vertice del cubo. Quanti sono i possibili percorsi distinti che può seguire?
(A) 10, **(B)** 18, **(C)** 22, **(D)** 26, **(E)** 30.

25) Un cubo di lato 1 m e una sfera hanno lo stesso centro e la superficie della sfera passa per i punti medi di tutti i lati del cubo. Quanto misura l'area della superficie del cubo esterna alla sfera?
(A) $(6 - \frac{3\pi}{2})$ m^2, **(B)** $(8 - 2\pi)$ m^2, **(C)** $(6 - \frac{4\pi}{3})$ m^2, **(D)** $(12 - 3\pi)$ m^2,
(E) π m^2.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2010

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Quanti lunedì possono esserci al massimo in 45 giorni consecutivi?
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 7, **(D)** 8, **(E)** 9.

2) Emilio prende al buio dei calzini da una cesta in cui ci sono: 6 calzini neri, 14 calzini blu e 8 calzini verdi. Per essere sicuro che tra i calzini che ha preso ce ne siano due dello stesso colore, il numero minimo di calzini che deve prendere è:
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 9, **(D)** 15, **(E)** 21.

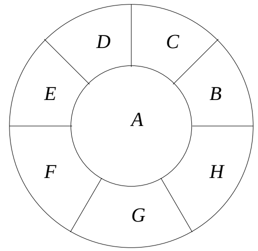
3) Quante cifre ha il quadrato di un numero naturale di 10 cifre?
(A) meno di 25, **(B)** 40, **(C)** 50, **(D)** 60, **(E)** almeno 100.

4) Quale fra queste serie di disuguaglianze è corretta?
(A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$, **(B)** $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$,
(C) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$, **(D)** $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$,
(E) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$.

5) Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il giro con l'ultimo petalo che è tangente al penultimo e al primo petalo, e al cerchio giallo. Quanti petali ha la margherita?
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 5, **(D)** 6, **(E)** questa disposizione è impossibile: l'ultimo petalo si sovrappone necessariamente al primo.

6) a, b e c sono numeri reali tali che comunque se ne scelgano due la loro somma è maggiore o uguale a zero. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \cdot b \cdot c \geq 0$, **(B)** almeno uno dei tre numeri è zero, **(C)** almeno uno dei tre numeri è strettamente minore di zero, **(D)** a, b e c sono tutti maggiori o uguali a zero, **(E)** $a + b + c \geq 0$.

7) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in otto stati, uno centrale e sette intorno a questo, come indicato nella figura a fianco. Inoltre a ciascuno stato assegna come nome una lettera (vedi figura). Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?
(A) Nessuno, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.



8) Silvano, l'uomo più ricco di Nettuno, possiede un'autostrada con molte corsie. In un momento di prosperità decide di aumentare il numero di corsie del 60 %. Successivamente, a causa di un'antica legge del pianeta, deve ridurre il numero di corsie di una certa percentuale X. Dopo averlo fatto si ritrova con lo stesso numero di corsie che aveva all'inizio. Quanto vale X?
(A) 15%, **(B)** 21,5%, **(C)** 28%, **(D)** 37,5%, **(E)** 60%.

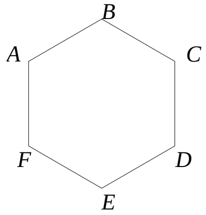
9) In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?
(A) $(5 + \sqrt{3})$ cm, **(B)** $(2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm, **(C)** $(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm,
(D) $(5 + \sqrt{2})$ cm, **(E)** $(2 + 3\sqrt{3})$ cm.

10) Quanto vale la somma: $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \ldots + 35 + 35 + 36$?
(A) 990, **(B)** 1105, **(C)** 1295, **(D)** 1395, **(E)** 1505.

11) La squadra dei matematici partecipa ad un campionato in cui ogni vittoria vale 3 punti, ogni pareggio 1 punto e ogni sconfitta 0 punti. Dopo le prime 13 partite la squadra ha 29 punti e ha perso tante partite quante ne ha pareggiate. Quante partite ha vinto finora?
(A) 4, **(B)** 6, **(C)** 8, **(D)** 9, **(E)** 11.

12) Per quanti valori distinti del numero naturale n l'equazione $3x^2 + 2nx + 3 = 0$ ha due soluzioni reali distinte, e queste sono entrambe numeri interi?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 4, **(E)** più di 5.

13) $ABCDEF$ è un esagono regolare di lato 1 cm. G è il punto di intersezione tra le diagonali AC e BE. Quanto vale l'area del triangolo ABG?
(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\text{cm}^2$, **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}\,\text{cm}^2$, **(C)** $\frac{9}{40}\,\text{cm}^2$,
(D) $\frac{1+\sqrt{3}}{12}\,\text{cm}^2$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$.

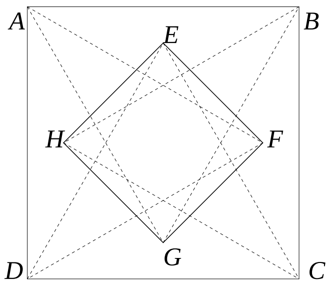


14) Quante cifre ha il numero $(111222333444555666777888999)/111$?
(A) 13, **(B)** 21, **(C)** 25, **(D)** 27, **(E)** 29.

15) Un atleta percorre 5 km in 16 minuti e 40 secondi. Durante il percorso aumenta progressivamente la sua velocità, in modo che ogni chilometro viene coperto in 5 secondi in meno del precedente. Quanto tempo impiega per percorrere l'ultimo chilometro?
(A) 2 minuti e 55 secondi, **(B)** 3 minuti, **(C)** 3 minuti e 5 secondi,
(D) 3 minuti e 10 secondi, **(E)** 3 minuti e 15 secondi.

16) Quante terne distinte (x, y, z), formate da numeri interi compresi tra 0 e 100 (estremi inclusi), soddisfano $(x-y)^2+(y+z)^2 = (x+y)^2+(y-z)^2$?
(A) $101 \cdot 201$, **(B)** 10^6, **(C)** 101^2, **(D)** 10^4, **(E)** $51 \cdot 301$.

17) Nella figura a fianco, il quadrato $ABCD$ ha lato 1 m e i triangoli: ABG, BCH, CDE e DAF sono equilateri. Quanto vale l'area di $EFGH$?
(A) $\frac{1}{6}\,\text{m}^2$, **(B)** $\frac{1}{4}\,\text{m}^2$, **(C)** $(2-\sqrt{3})\,\text{m}^2$,
(D) $(3\sqrt{3}-5)\,\text{m}^2$, **(E)** $\frac{1}{3}\,\text{m}^2$.



18) Quanti sono i quadrati perfetti di almeno tre cifre, minori o uguali di $2010 \cdot 2011$?
(A) 1890, **(B)** 1910, **(C)** 2001, **(D)** 2011, **(E)** 2110.

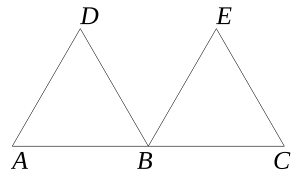
19) Il maggiore Tom è atterrato su un pianeta popolato da gatti viola, che dicono sempre la verità, e da gatti neri, che mentono sempre. Nel buio più completo incontra 5 gatti, che si rivolgono a lui nel modo seguente. Primo gatto: "Sono viola"; secondo gatto: "Almeno 3 di noi sono viola", terzo gatto: "Il primo gatto è nero", quarto gatto: "Almeno 3 di noi sono neri", quinto gatto: "Siamo tutti neri". Quanti dei 5 gatti sono viola?
(A) nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

20) Valeria deve scegliere la combinazione della sua cassaforte, che deve essere un numero di cinque cifre, tutte diverse da zero, divisibile per tre, e tale che delle prime quattro cifre (da sinistra) due siano pari e due dispari. Quante possibilità ha?
(A) $2^5 \cdot 5^2$, **(B)** $2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, **(C)** $2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^2$, **(D)** $5^2 \cdot 3^4$, **(E)** $2^{10} \cdot 5 \cdot 3$.

21) All'Università delle Favole, dove gli studenti sono infiniti e gli sbadigli molto contagiosi, ogni volta che uno studente sbadiglia altri 2 studenti sbadigliano dopo 5 secondi (chi ha già sbadigliato non lo fa più). Ieri la Bella Addormentata (una studentessa) era lì e, essendo molto stanca, ha sbadigliato per prima! In quanti (inclusa la Bella Addormentata) avevano sbadigliato dopo 57 secondi?
(A) 2047, **(B)** 3024, **(C)** 3625, **(D)** 4095, **(E)** 8192.

22) Mago Merlino ha 7 palline bianche e 7 nere, e può fare due tipi di incantesimi: il primo fa sparire 3 palline nere e ne fa comparire 2 bianche (Merlino lo può fare solo se ci sono almeno 3 palline nere); il secondo fa sparire 4 palline bianche e ne fa comparire 9 nere (Merlino lo può fare solo se ci sono almeno 4 palline bianche). Dopo aver lanciato varie volte questi incantesimi è possibile che si trovi con...
(A) 2 palline bianche e 15 nere, **(B)** 4 palline bianche e 14 nere, **(C)** 3 palline bianche e 11 nere, **(D)** 7 palline bianche e 13 nere, **(E)** 10 palline bianche e 10 nere.

23) Nella figura a fianco, AC misura 2 cm, B è il punto medio di AC e i triangoli ABD e BCE sono equilateri. Se P e Q sono i centri di ABD e BCE rispettivamente, quanto misura il raggio della circonferenza passante per P, Q e B?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm, **(B)** $\frac{1}{2}$ cm, **(C)** 1 cm, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm,
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.



24) Un cono circolare retto ha volume $1\,\text{m}^3$. Si taglia il cono parallelamente alla base, a una distanza dal vertice pari a un quarto dell'altezza del cono. Si ottiene così un nuovo cono; qual è il suo volume?
(A) $\frac{1}{64}\,\text{m}^3$, **(B)** $\frac{3}{64}\,\text{m}^3$, **(C)** $\frac{27}{64}\,\text{m}^3$, **(D)** $\frac{48}{64}\,\text{m}^3$, **(E)** $\frac{63}{64}\,\text{m}^3$.

25) In una squadra ci sono 11 giocatori e 11 maglie numerate da 1 a 11. I giocatori entrano nello spogliatoio uno alla volta, in ordine casuale. Ciascuno, appena arriva, sceglie una maglia a caso, tranne Danilo che preferisce la maglia numero 8 e, se è disponibile, sceglie quella. Qual è la probabilità che Danilo riesca ad ottenere il suo numero di maglia preferito?
(A) $\frac{4}{9}$, **(B)** $\frac{5}{11}$, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** $\frac{6}{11}$, **(E)** $\frac{5}{9}$.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

22 novembre 2011

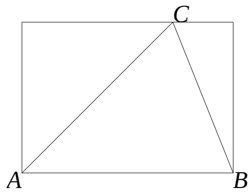
1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Quanti sono i numeri di 6 cifre, formati dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, divisibili per 1, 2, 3, 4, 5, 6?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 18, **(D)** 120, **(E)** 360.

2) Sia ABC un triangolo acutangolo. Costruiamo un rettangolo che abbia un lato coincidente con AB e contenga il punto C sul lato opposto ad AB. Facciamo la stessa costruzione partendo dal lato BC e dal lato CA, ottenendo così tre rettangoli. Allora sicuramente i tre rettangoli hanno:
(A) perimetri uguali, **(B)** aree uguali, **(C)** somma delle lunghezze delle diagonali uguali, **(D)** uguale rapporto tra lato maggiore e lato minore, **(E)** nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.

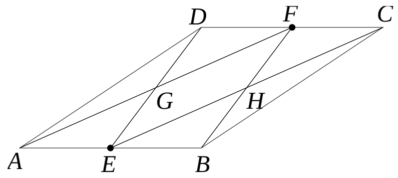


3) Su ogni vertice di una piramide a base ottagonale è scritto un numero, che può essere 1, 2 oppure 3, in modo che per ogni faccia (inclusa la base) la somma dei numeri scritti sui suoi vertici sia divisibile per tre. Sapendo che i numeri non sono tutti uguali a 3, quanto vale la somma di tutti i numeri scritti sui vertici?
(A) 12, **(B)** 14, **(C)** 15, **(D)** 18, **(E)** 21.

4) m e n sono due numeri interi positivi, tali che $m - n = 7$. Quanti sono i valori compresi tra 0 e 2011 (estremi inclusi) che possono essere assunti da $m + 5n$?
(A) 6, **(B)** 334, **(C)** 670, **(D)** 1005, **(E)** 2012.

5) Alla Grande Cena delle Olimpiadi, che si tiene ogni anno durante la manifestazione di Cesenatico, ci sono vari primi e vari secondi piatti. L'anno scorso c'erano 60 modi di scegliere un pasto (ovvero un primo e un secondo). Quest'anno verranno aggiunti dei primi, e ci saranno 68 modi di scegliere un pasto. Quanti primi c'erano, come minimo, lo scorso anno? [Nello scegliere un pasto è possibile abbinare qualsiasi primo a qualsiasi secondo.]
(A) 4, **(B)** 8, **(C)** 10, **(D)** 12, **(E)** 15.

6) Nel parallelogramma $ABCD$ in figura il segmento BD è perpendicolare ad AB ed E e F sono i punti medi di AB e CD rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero $GEHF$, sapendo che $AB = 5$ cm e $BD = 2$ cm.
(A) $\frac{15}{8}\,\mathrm{cm}^2$, **(B)** $2\,\mathrm{cm}^2$, **(C)** $\frac{9}{4}\,\mathrm{cm}^2$, **(D)** $\frac{5}{2}\,\mathrm{cm}^2$, **(E)** $3\,\mathrm{cm}^2$.



7) Un numero si dice palindromo se la sequenza delle sue cifre non cambia che la si legga da sinistra a destra o da destra a sinistra; ad esempio 36563 è palindromo. Quanti sono i numeri palindromi di 5 cifre tali che la somma delle loro cifre sia pari?
(A) 450, **(B)** 550, **(C)** 700, **(D)** 900, **(E)** 1000.

8) Gabriella scrive una successione di 10 numeri (eventualmente negativi), in modo che ciascun numero della successione, dal terzo in poi, sia la somma dei due che lo precedono. Il primo numero della successione è 34 mentre l'ultimo è 0. Quanto vale la somma di tutti i numeri della successione?
(A) -34, **(B)** 0, **(C)** 22, **(D)** 68, **(E)** 88.

9) La media delle ampiezze degli angoli interni di un poligono è 175°. Quanti lati ha il poligono?
(A) 18, **(B)** 25, **(C)** 60, **(D)** 72, **(E)** 80.

10) a, b e c sono tre numeri reali, tutti diversi tra loro. Per quanti numeri reali x, al massimo, possono valere le uguaglianze: $ax + b = bx + c = cx + a$?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** almeno 5.

11) Un canguro e una rana si trovano inizialmente sullo stesso vertice di un poligono regolare di 41 lati, e comiciano a fare dei salti. La rana salta sempre da un vertice a quello adiacente, in senso antiorario, mentre il canguro salta dal vertice in cui si trova a quello in cui c'è la rana. La sequenza dei salti è questa: la rana fa un

salto, il canguro fa un salto; la rana fa due salti, il canguro fa un salto; la rana fa tre salti, il canguro fa un salto, e così via. Dopo che il canguro ha fatto 40 salti, quante volte è tornato sul vertice di partenza?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

12) Diciamo che una coppia di numeri naturali (a, b) è *bella* se comunque si scelga una coppia di numeri naturali (c, d) tali che $ab = cd$, vale $a + b = c + d$. Quante sono le coppie belle?
(A) Nessuna, **(B)** una, **(C)** cinque, **(D)** sette, **(E)** più di otto.

13) Marta ha scritto sulla lavagna un numero intero pari. Per 12 volte Marta sostituisce il numero scritto sulla lavagna con il suo quadrato aumentato di 5. Con quali cifre può terminare il numero che si trova scritto sulla lavagna alla fine dei calcoli di Marta?
(A) 0 oppure 4, **(B)** 0, 4 oppure 6, **(C)** 0 oppure 6, **(D)** 4 oppure 6,
(E) può terminare con una qualsiasi cifra pari.

14) In ogni casella di una scacchiera di 8 righe per 8 colonne è scritto un numero intero. Le righe e le colonne della scacchiera sono numerate da 1 a 8, e la casella che sta nella riga 1 e nella colonna 1 è nera. La somma dei numeri scritti nella caselle bianche è 28, mentre la somma dei numeri scritti nelle colonne dispari è 47. Se cambiamo il segno a tutti i numeri che si trovano nelle caselle bianche, quanto diventa la somma dei numeri che si trovano nelle righe dispari?
(A) -14, **(B)** 19, **(C)** 33, **(D)** 75, **(E)** i dati non sono sufficienti a determinarlo.

15) Ciascuno dei quattro amici Anna, Erica, Lorenzo e Giuseppe, mente sempre o dice sempre la verità. Anna dice: "Erica mente sempre"; Erica dice: "Giuseppe dice sempre il vero"; Giuseppe dice: "Anna mente sempre"; infine Lorenzo dice: "Anna, Erica e Giuseppe mentono sempre". Quanti sono, al massimo, quelli che mentono sempre?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** nessuna delle precedenti.

16) ABC è un triangolo isoscele, con $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm. D ed E sono due punti su AB e AC rispettivamente, entrambi distanti 6 cm da A, e H è il piede dell'altezza di ABC relativa a BC. Calcolare il rapporto tra le aree di ABC e di DHE.
(A) $\frac{25}{9}$, **(B)** $\frac{25}{12}$, **(C)** $\frac{10}{6}$, **(D)** $\frac{25}{6}$, **(E)** $\frac{9}{4}$.

17) Sapendo che l'equazione $ax^2 - bx + c = 0$, con $a > 1$, ha due soluzioni positive strettamente minori di 1, possiamo affermare sicuramente che:
(A) $c+b < 3a$, **(B)** $c \le b < a$, **(C)** $b \le c$, **(D)** $c \le b < 2$, **(E)** $b < 2$ e $c < a$.

18) Gabriella ha un grande dado a sei facce completamente bianco, tranne che per i numeri scritti sulle facce, e vuole colorare tutte le facce e tutti i vertici del dado, usando il rosso, il blu, il verde e il giallo, in modo che non ci siano due facce adiacenti (cioè con un lato in comune) con lo stesso colore e ogni vertice abbia colore diverso da tutte le facce a cui appartiene. In quanti modi diversi lo può fare?
(A) 24 **(B)** 48, **(C)** 96, **(D)** 264, **(E)** 4^6.

19) Quante terne ordinate (p, q, r), formate da numeri primi minori di 100, verificano $p^2 + q^2 = r$? [1 non è un numero primo.]
(A) 2, **(B)** 4, **(C)** 6, **(D)** 8, **(E)** 16.

20) Nel quadrilatero $ABCD$ le diagonali sono ortogonali tra loro e gli angoli in B e in D sono retti. Inoltre $\overline{AB} = \overline{AD} = 20$ cm, $\overline{BC} = \overline{CD} = 30$ cm. Calcolare il raggio della circonferenza inscritta in $ABCD$.
(A) 15 cm, **(B)** $5\sqrt{13}$ cm, **(C)** 10 cm, **(D)** $6\sqrt{5}$ cm, **(E)** 12 cm.

21) In un torneo ci sono 20 partecipanti. Ad ogni turno vengono estratti due tra i partecipanti ancora in gara, e questi disputano una partita. Ogni partecipante che sia stato sconfitto due volte viene eliminato e l'ultimo concorrente che resta vince. Sapendo che il vincitore non ha mai perso, quante partite si sono disputate in tutto?
(A) 19, **(B)** 38, **(C)** 40, **(D)** 380, **(E)** non ci sono dati sufficienti.

22) Su un foglio è disegnato il quadrato $ABCD$. Il foglio viene piegato (lungo una linea retta) in modo che B vada a coincidere con il punto medio di DC. Il lato BC viene diviso dalla piegatura in due segmenti di lunghezze a e b, con $a \le b$. Quanto vale b/a?
(A) 2, **(B)** 1, **(C)** 5/3, **(D)** 25/9, **(E)** $\sqrt{5}/2$.

23) La polizia indaga su una rapina. I cinque indagati, tra cui c'è sicuramente il colpevole e forse anche qualche suo complice, interrogati dichiarano: A: "B è colpevole. D è uno dei complici." B: "E è innocente. A è uno dei complici." C: "E è il colpevole. D è innocente." D: "Il colpevole è effettivamente E. A è stato suo complice." E: "A era uno dei complici. C è il colpevole." Sapendo che il colpevole mente su tutto, gli eventuali complici, per paura, rendono una dichiarazione vera ed una falsa e le persone innocenti, infine, dicono sempre la verità, quanti sono i complici?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** è impossibile determinarlo.

24) Abbiamo una sequenza di 2011 numeri, di cui indichiamo con a_n il termine n-esimo. Sapendo che $a_1 = 1$, e che per ogni $n \ge 2$, $a_n = a_{n-1}(3n + 1)$, trovare le ultime quattro cifre del termine a_{2011}.
(A) 0000, **(B)** 3400, **(C)** 6000, **(D)** 6031, **(E)** 6034.

25) Re Tal dei Tali si trova al centro di una scacchiera di tre righe e tre colonne. Quanti sono i possibili percorsi distinti di 3 mosse che Re Tal dei Tali può effettuare all'interno della scacchiera ? [Quando fa una mossa, il re si sposta in una qualsiasi delle caselle che hanno in comune almeno un vertice con la casella in cui si trova.]
(A) 36, **(B)** 54, **(C)** 84, **(D)** 121, **(E)** 168.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

22 novembre 2012

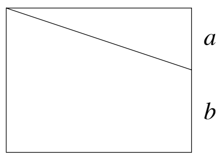
1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ________________ Cognome ________________ Classe ____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Marco distribuisce 1260 figurine tra tutti i suoi amici, che sono meno di 100, dando a ciascuno di loro lo stesso numero di figurine e in modo da distribuirle tutte. Qual è il massimo numero di amici che Marco può avere?
(A) 70 **(B)** 84 **(C)** 90 **(D)** 94 **(E)** nessuna delle precedenti

2) Sapendo che il rettangolo in figura viene diviso dalla linea inclinata in due parti di aree una quadrupla dell'altra, calcolare il rapporto tra le lunghezze dei segmenti a e b.
(A) 2/3 **(B)** 1/4 **(C)** 1/5 **(D)** 1/2 **(E)** 2/5

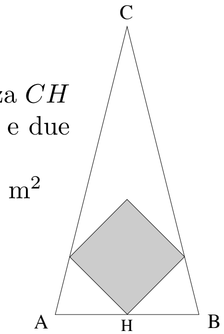


3) Sul pianeta Papalla un anno è formato da 400 giorni, numerati da 1 a 400; sono considerati festivi i giorni corrispondenti ai multipli di 6. Il nuovo governo di Papalla riforma il calendario, dividendo l'anno in 10 mesi di 40 giorni ciascuno; i giorni di ogni mese vengono ora numerati da 1 a 40, e rimane valida la regola di fare festa nei giorni i cui numeri siano multipli di 6. In seguito alla riforma, il numero dei giorni festivi in un anno è:
(A) rimasto invariato **(B)** aumentato meno del 10% **(C)** aumentato del 10%
(D) diminuito meno del 10% **(E)** diminuito del 10%

4) S_1 e S_2 sono due sfere; il volume di S_2 è il doppio del volume di S_1. Quanto vale il rapporto tra la superficie di S_2 e quella di S_1?
(A) $\sqrt[3]{4}$ **(B)** 2 **(C)** $2\sqrt[3]{2}$ **(D)** $\sqrt{8}$ **(E)** nessuna delle precedenti

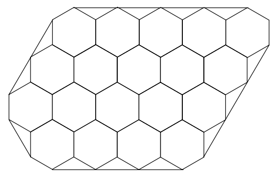
5) Matteo per raggiungere la scuola deve effettuare 2 km in salita, e pedalando sulla sua bicicletta riesce ad arrivare in 12 minuti. Al ritorno, andando in discesa per la stessa strada, impiega solo 4 minuti. Qual è la velocità media di Matteo nell'intero tragitto casa-scuola-casa?
(A) 10 km/h **(B)** 12 km/h **(C)** 15 km/h **(D)** 20 km/h
(E) nessuna delle precedenti

6) Il triangolo isoscele in figura ha base AB di lunghezza 1 m e altezza CH di lunghezza 2 m. Il quadrato al suo interno ha un vertice in H, e due vertici sugli altri due lati: calcolarne l'area.
(A) 1/5 m^2 **(B)** 5/16 m^2 **(C)** 8/25 m^2 **(D)** 1/3 m^2 **(E)** 1/2 m^2



7) In una classe gli alunni biondi sono il 40%, del totale mentre i restanti sono castani. Tra tutti gli alunni biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?
(A) 20% **(B)** 25% **(C)** 30% **(D)** 40% **(E)** 50%

8) Un pavimento è piastrellato come in figura. In quanti modi è possibile colorare le mattonelle esagonali di blu, rosso e nero in modo che due mattonelle esagonali con un lato in comune non abbiano mai lo stesso colore?
(A) nessuno **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** infiniti



9) Quante sono le coppie di numeri primi (p, q) tali che $p^q + 1$ sia ancora un numero primo? [Nota: 1 non è un numero primo.]
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** infinite **(E)** nessuna delle precedenti

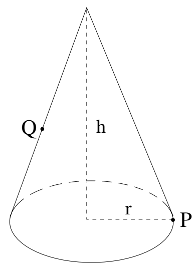
10) Al 22 novembre 2012 il prezzo della benzina è dato per il 35% dal costo del prodotto, che è formato a sua volta da diverse voci (petrolio, raffinazione, costi di distribuzione, ecc.). In particolare il costo del petrolio è il 24% del costo del prodotto. Sapendo che il primo dicembre 2012 il prezzo del petrolio aumenterà del 10% e gli altri costi rimarranno invariati, di quanto aumenterà il prezzo della benzina in tale data?
(A) 10% **(B)** 2,4% **(C)** 3,5% **(D)** 0,84 % **(E)** nessuna delle precedenti

11) Determinare la somma delle cifre del numero $(10^{2012}+1)^3$.
(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 2012 **(D)** 2013 **(E)** nessuna delle precedenti

12) Quale tra i seguenti è il numero più grande che divide $n^5 - 5n^3 + 4n$, qualsiasi sia il numero naturale $n \geq 3$?
(A) 15 **(B)** 35 **(C)** 60 **(D)** 120 **(E)** 240

13) Quale tra le seguenti quantità dipendenti da x è minore o uguale a $\frac{1}{6} + x^2$ per ogni numero reale x?
(A) $\sqrt{\frac{1}{6} + x^2}$ **(B)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}x$ **(C)** $(\frac{1}{6} + x)^2$ **(D)** $\frac{1}{6} + x$
(E) nessuna delle precedenti

14) Il Mago Merlino posa a terra il suo cappello, un cono retto di altezza $h = 20\sqrt{2}$ cm e di base una circonferenza di raggio $r = 10$ cm. Una formica, partendo da un punto P sul bordo del cappello, vuole raggiungere il punto Q situato nel punto medio dell'apotema dalla parte opposta (vedi figura). Quanto misura il cammino più breve che la formica dovrà percorrere sulla superficie del cappello per raggiungere Q?
(A) $15\sqrt{3}$ cm **(B)** $15 + 10\sqrt{2}$ cm **(C)** $15 + 5\pi$ cm
(D) $15 + 10\pi$ cm **(E)** nessuna delle precedenti



15) Abbiamo un dado a 4 facce recanti i numeri 1,3,5,7 ed un dado a 8 facce recanti i numeri 2,4,6,8,10,12,14,16 (per ciascun dado ogni faccia ha la stessa probabilità di uscire di ogni altra). Qual è la probabilità che, lanciandoli una sola volta entrambi, si ottenga come somma 11?
(A) 1/16 **(B)** 1/8 **(C)** 1/4 **(D)** 1/2 **(E)** 1

16) Sapendo che k è un numero intero e che l'equazione $x^{10} + kx^2 + 4 = 0$ ha almeno una soluzione data da un numero intero x, quanti valori distinti può assumere k?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** infiniti

17) Assegnato un numero di due cifre che è un quadrato perfetto, qual è la probabilità che, aggiungendo una cifra a caso tra 1 e 9 a sinistra del numero, si ottenga un multiplo di 11?
(A) 1/9 **(B)** 2/9 **(C)** 3/9 **(D)** 4/9 **(E)** dipende dal numero scelto

18) Carlo ha sei mele e sei pere: in quanti modi può mettere in fila 6 frutti, in modo tale che tra due mele non ci sia mai nessuna pera?
(A) 16 **(B)** 22 **(C)** 32 **(D)** 35 **(E)** 39

19) Una cavalletta si sposta compiendo salti di esattamente 10 cm. Il suo moto segue questo schema: compie un certo numero di salti in una data direzione, poi ruota verso la sua sinistra di 120° e compie, nella nuova direzione, il doppio dei salti che aveva effettuato nella precedente direzione. A questo punto ruota nuovamente di 120° verso sinistra e raddoppia ancora una volta il numero dei salti. Sapendo che inizia compiendo un solo salto in una data direzione, a quale distanza dal punto iniziale si troverà dopo 17 salti?
(A) 20 cm **(B)** $20\sqrt{3}$ cm **(C)** 40 cm **(D)** $40\sqrt{3}$ cm **(E)** 50 cm

20) Sia x un numero reale maggiore di 1 tale che $(x-1)(x+1)^{2012} = 1$. Allora:
(A) $1 < x < 1 + 1/3^{2012}$ **(B)** $1 + 1/3^{2012} < x < 1 + 1/2^{2012}$
(C) $1 + 1/2^{2012} < x < 1 + 1/3$ **(D)** $1 + 1/3 < x < 1 + 1/2$ **(E)** $x > 2$

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

27 novembre 2013

ZANICHELLI Best Western

1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.*

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore.
Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ________________ Cognome ________________ Classe ____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

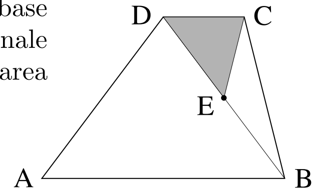
1) Fino al 2013, nella colonia penale di Zoranel la popolazione era costituita per il 60% da androidi, dei quali il 5% adibiti a vigilanza; diciamo q la percentuale di androidi di vigilanza sul totale della popolazione in quell' anno. Nel 2014 la popolazione aumentò del 10% per l'arrivo di N umani esiliati. Di quanto diminuì la percentuale di androidi di vigilanza sulla popolazione totale?
(A) non cambiò **(B)** di meno di un decimo di q **(C)** di più di un decimo di q
(D) dipende da N **(E)** dipende da quanto era numerosa la popolazione iniziale.

2) Leo lancia 7 volte una moneta (non truccata) ottenendo due volte testa e cinque volte croce. Se la lancia ancora una volta, con quale probabilità otterrà testa?
(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $1-\frac{1}{2^7}$ **(D)** $\frac{35}{2^7}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

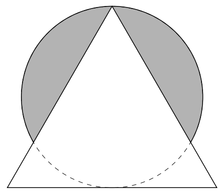
3) Sapendo che f è una funzione dispari, cioè tale che $f(x) = -f(-x)$ per ogni x, quale delle seguenti è sicuramente una funzione dispari?
(A) $f(x)-1$ **(B)** $(f(x))^2$ **(C)** $(f(x))^2+f(x)$ **(D)** $(f(x))^3+1$ **(E)** $(f(x))^3+f(x)$

4) Quanto vale $\log_2(3)\cdot\log_3(4)\cdot\log_4(5)\cdot\ldots\cdot\log_{126}(127)\cdot\log_{127}(128)$?
(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** nessuna delle precedenti

5) In un trapezio $ABCD$ la base maggiore AB è tripla della base minore CD. Indicato con E il punto medio della diagonale BD, qual è il rapporto fra l'area del triangolo CDE e l'area del trapezio?
(A) 1/3 **(B)** 1/6 **(C)** 1/8 **(D)** 1/12
(E) non può essere determinata dai dati forniti



6) In una scultura d'arte moderna è rappresentato un cerchio nascosto in parte da un triangolo equilatero, come in figura: il cerchio ha il diametro lungo quanto l'altezza del triangolo, la quale misura $\sqrt{6}$ m. Quanto vale l'area della parte del cerchio non coperta dal triangolo ?
(A) $(\frac{3}{2}\pi-\frac{8}{\sqrt{3}})$ m^2 **(B)** $\frac{\pi}{2}$ m^2 **(C)** $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})$ m^2
(D) $(\frac{3}{2}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8})$ m^2 **(E)** $\frac{3}{2}\pi$ m^2



7) Quanto è lungo il percorso più corto che passa per tutti i vertici di un cubo di lato 1 m? N.B. il percorso può anche passare all'interno del cubo.
(A) 6 m **(B)** 7 m **(C)** $(6+\sqrt{2})$ m **(D)** $(6+\sqrt{3})$ m **(E)** 8 m

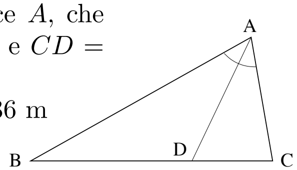
8) Data una tabella con 2 righe e 1007 colonne, scriviamo tutti i numeri da 1 a 1007 sulla prima riga in ordine crescente, e i numeri da 1008 a 2014 sulla seconda, sempre in ordine crescente. Guardiamo ora la tabella come 1007 coppie di numeri sovrapposti in verticale: in quante di esse il numero che compare nella seconda riga è un multiplo di quello che gli sta sopra?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

9) Alberto va in cartoleria per comprare dei quaderni e li vuole tutti di colori diversi. In cartoleria ci sono 2014 quaderni di vari colori; per ciascun colore il numero di quaderni è una potenza di 2, diversa da colore a colore. Quanti quaderni può comprare al massimo Alberto?
(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11.

10) I lati di un triangolo misurano rispettivamente 2 cm, 3 cm e 4 cm. Calcolare l'area del cerchio inscritto nel triangolo.
(A) $\frac{5}{12}$ cm^2 **(B)** $\frac{5\pi}{36}$ cm^2 **(C)** $\frac{5\pi}{12}$ cm^2 **(D)** $\frac{2\pi}{3}$ cm^2 **(E)** π cm^2

11) Sapendo che k è un numero intero positivo fissato, per quante coppie (x, y) di numeri reali maggiori o uguali a 0 vale l'uguaglianza $x^{2k}+y^{2k}=(xy)^k$?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** infinite **(E)** dipende da k

12) Dato un triangolo ABC, si tracci la bisettrice dal vertice A, che incontra il lato BC nel punto D. Se $CD + CA = 12$ m, e $CD = \frac{1}{3}BC$, quanto misura il perimetro del triangolo?
(A) meno di 32 m **(B)** 32 m **(C)** 36 m **(D)** più di 36 m
(E) non si può determinare dai dati forniti



13) Se n è un numero naturale con 6 divisori interi positivi, quanti divisori interi positivi ha n^2? N.B.: tra i divisori di un numero contiamo anche 1 ed il numero stesso.
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 36 **(E)** la risposta dipende da n

14) Il polinomio $p(x)$ ha grado maggiore o uguale a 2 ed i suoi coefficienti sono tutti numeri interi. Quale dei seguenti numeri divide certamente $p(169) - p(1)$?
(A) 25 **(B)** 32 **(C)** 36 **(D)** 49 **(E)** 56

15) Sapendo che a, b, c, d, e, f sono interi positivi, quante sono al massimo le coppie (x, y), con x e y compresi tra 0 e 1, che soddisfano il seguente sistema?

$$\begin{cases} ax^2 + bxy &= c \\ dx^2 + exy &= f \end{cases}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** infinite **(E)** nessuna delle precedenti

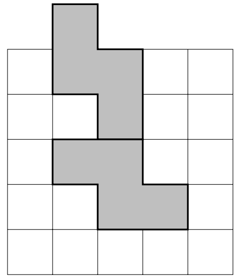
16) Consideriamo il numero $N = 2000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1999 \cdot 2000$. Indichiamo con X il numero di zeri con cui termina N quando è scritto in base 10, e con Y il numero di zeri con cui termina N quando è scritto in base 5. Allora $X - Y$ vale:
(A) -2 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 2013 **(E)** 2014

17) Come si ordinano in ordine crescente di grandezza i tre numeri 3^{33}, 4^{30}, 5^{25} ?
(A) $3^{33} < 4^{30} < 5^{25}$ **(B)** $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$ **(C)** $4^{30} < 3^{33} < 5^{25}$
(D) $4^{30} < 5^{25} < 3^{33}$ **(E)** $5^{25} < 4^{30} < 3^{33}$

18) Al porto sono arrivate 5 casse contenenti ciascuna 72 banane e in una di esse vi è un certo numero di banane radioattive. Si sa che scegliendo a caso due delle cinque casse e scegliendo a caso da ciascuna di esse una banana, la probabilità che una delle due banane scelte sia radioattiva è del 5 %. Quante sono le banane radioattive?
(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** nessuna delle precedenti

19) Siano $p(x)$ e $q(x)$ due *trinomi*, dove per trinomio si intende la somma di tre monomi non nulli di gradi diversi tra loro (ad esempio $-x^5 + 3x^2 + 2x$ è un trinomio). Facciamo il prodotto $p(x)q(x)$: da quanti monomi non nulli è composto, come *minimo*, tale prodotto?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

20) Vogliamo coprire una griglia di 5x5 quadratini con delle tessere a forma di z come in figura, che possono essere ruotate, ribaltate e sovrapposte, eventualmente anche fuoriuscendo dalla griglia (purché ogni parte di tessera che cade all'interno della griglia si sovrapponga precisamente a 1, 2, 3 o 4 quadratini). Quante tessere ci vogliono, come minimo?
(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10



PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

27 novembre 2014

Testo 1

1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.*

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore.
Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ______________ Cognome ______________ Classe ____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Nel paese di Gnallucci circolano quattro monete: dobloni, zecchini, talleri e fufignezi. Un doblone vale quanto uno zecchino più un tallero e un fufignezo. Due dobloni valgono quanto uno zecchino più tre talleri e cinque fufignezi. Un tale entra in un negozio con uno zecchino e ne esce con un tallero. In fufignezi, quanto ha pagato?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

2) Nell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ si sa che $c < 0$. Allora certamente:
(A) l'equazione non ha radici reali,
(B) l'equazione ha due radici reali coincidenti,
(C) l'equazione ha una radice reale positiva e una radice reale negativa,
(D) l'equazione ha due radici reali positive,
(E) l'equazione ha due radici reali negative.

3) Un parallelogramma di perimetro $\mathcal{P} = 8$ cm ha area $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$ cm^2. Quanto misura il suo angolo acuto?
(A) $30°$, **(B)** $45°$, **(C)** $60°$, **(D)** un tale parallelogramma non esiste,
(E) l'angolo non è univocamente determinabile dai dati forniti.

4) Tredici amici si ritrovano per un gioco da tavolo. Il gioco prevede che a ogni partecipante vengano distribuiti dei sesterzi, in modo che il primo giocatore riceva un sesterzo ed ogni giocatore successivo riceva un numero di sesterzi pari al doppio di quelli assegnati al giocatore precedente. Sapendo che ci sono in tutto 10000 sesterzi, quante saranno i sesterzi che resteranno non distribuiti?
(A) 0, **(B)** 32, **(C)** 205, **(D)** 951, **(E)** 1809.

5) In una certa azienda ogni dirigente percepisce uno stipendio pari a quattro volte quello di ogni operaio. Il costo complessivo che l'azienda sostiene per pagare gli stipendi di tutti i dipendenti è uguale a sei volte il costo complessivo degli stipendi di tutti i dirigenti. Quanti operai ci sono per ciascun dirigente?
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 20, **(D)** 24, **(E)** 30.

6) Quale di questi numeri è un numero intero?
(A) $0{,}002 \cdot 100 + \sqrt{11025}$, **(B)** $32 \cdot 3 \cdot 1{,}6$, **(C)** $(8,2)^2 - (1,8)^2$,
(D) $(\sqrt{2}+1)^2$, **(E)** $\dfrac{34}{1{,}02} + \dfrac{5}{6\sqrt{0{,}0001}}$.

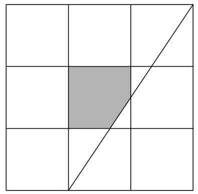
7) Si consideri un triangolo equilatero T, e si chiami G il suo baricentro. Si colorino di rosso tutti i punti interni al triangolo la cui distanza da G è minore o uguale alla distanza da uno qualsiasi dei tre vertici. Quanto vale il rapporto tra l'area rossa e l'area di T?
(A) $\frac{1}{3}$, **(B)** $\frac{1}{4}$, **(C)** $\frac{2}{3}$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{9}$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8) Sapendo che l'equazione $2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 4 soluzioni reali a, b, c, d, quanto fa $a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$?
(A) -7, **(B)** $\frac{21}{5}$, **(C)** $\frac{10}{21}$, **(D)** $\frac{5}{2}$, **(E)** 0.

9) Otto giocatori, di cui quattro sono difensori e quattro sono attaccanti, organizzano un torneo di biliardino. Ogni possibile coppia difensore-attaccante gioca una e una sola volta contro ogni altra possibile coppia difensore-attaccante. Quanti incontri faranno in tutto?
(A) 24, **(B)** 36, **(C)** 48, **(D)** 72, **(E)** 144.

10) È dato un numero primo le cui cifre sono, nell'ordine: a, b, c. Quanti divisori primi ha il numero di sei cifre la cui scrittura decimale è $abcabc$?
[Ricordiamo che 1 non è un numero primo.]
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

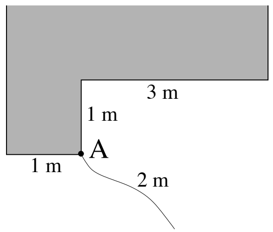
11) Il quadrato in figura è diviso in 9 quadrati congruenti. Sapendo che il suo lato misura L, calcolare l'area evidenziata in grigio.
(A) $\frac{11}{108}L^2$, **(B)** $\frac{1}{9}L^2$, **(C)** $\frac{5}{54}L^2$, **(D)** $\frac{1}{12}L^2$, **(E)** $\frac{13}{81}L^2$.



12) Se $x + \frac{1}{x} = 5$, quanto fa $x^3 + \frac{1}{x^3}$?
(A) 105, **(B)** 110, **(C)** 115, **(D)** 120, **(E)** 125.

13) Uno studente in gita si sveglia la mattina e, dalla sua stanza di un hotel a sette piani (oltre al piano terra), scende in ascensore per recarsi al piano terra a fare colazione. Tuttavia, molto assonnato, preme ripetutamente il pulsante sbagliato e visita esattamente una volta tutti gli altri piani (escluso il suo), prima di arrivare finalmente al piano terra. Sapendo che la sua stanza non si trova al piano terrra, quanta strada percorre l'ascensore, al massimo?
(A) 29 piani, **(B)** 28 piani, **(C)** 27 piani, **(D)** 26 piani, **(E)** 25 piani.

14) Francesco vuole seminare una zona del giardino della sua casa, che ha la forma riportata in figura (casa in grigio e giardino in bianco tutto intorno). Per far questo, lega una corda di 2 m all'angolo A della casa, la tende e, spostandone l'estremità, disegna il perimetro della zona da seminare. Quanti m^2 seminerà Francesco?
(A) $2\pi + \sqrt{3}$, **(B)** $\frac{15}{4}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$, **(C)** $\frac{31}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$,
(D) $\frac{9}{4}\pi$, **(E)** $4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.

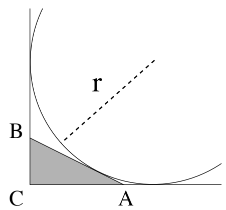


15) Il numero intero positivo n è tale che il polinomio

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots - 2014x^{2013} + nx^{2014}$$

abbia almeno una soluzione intera. Quanto vale n?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 2014, **(D)** 2015, **(E)** nessuna delle precedenti.

16) Sia ABC un triangolo rettangolo i cui cateti misurano $AC = 2$m e $BC = 1$m. Consideriamo la circonferenza tangente all'ipotenusa e alle rette che contengono AC e BC, esterna al triangolo ABC: quanto misura il suo raggio r in m?
(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, **(B)** $\sqrt{5}$, **(C)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, **(D)** 5, **(E)** $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

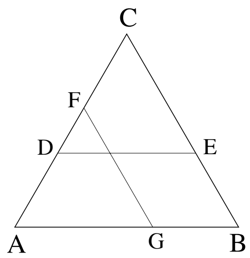


17) Simone ha un portafortuna a forma di tetraedro regolare, le cui facce hanno lati di lunghezza $6\sqrt{2}$ cm. Qual è il volume del tetraedro in cm^3?
(A) 36, **(B)** $36\sqrt{2}$, **(C)** 72, **(D)** $72\sqrt{2}$, **(E)** $72\sqrt{3}$

18) Un artista ha realizzato una scultura di pietra che ha la forma di uno strano poliedro. La superficie della scultura è formata da 31 facce triangolari, 18 facce quadrangolari, 11 facce pentagonali e 7 facce esagonali. Quanti spigoli ha il poliedro?
(A) 65, **(B)** 94, **(C)** 100, **(D)** 123, **(E)** 131.

19) In questa stagione accade spesso che quando Luca esce da scuola piova: ciò accade con probabilità uguale a $\frac{2}{5}$. Per questo motivo Luca ritiene opportuno prendere con sé un ombrello, ma a volte se ne dimentica; la probabilità che in un singolo giorno Luca dimentichi l'ombrello è $\frac{1}{2}$. Qual è la probabilità che per tre giorni consecutivi Luca non si bagni mai, durante il ritorno da scuola?
(A) minore di $\frac{1}{6}$, **(B)** compresa tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$, **(C)** compresa tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$,
(D) compresa tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, **(E)** maggiore di $\frac{5}{6}$.

20) Un triangolo equilatero ABC di lato 1 m viene diviso in due parti di area uguale dal segmento DE parallelo ad AB, come in figura; ugualmente, viene diviso in due parti di area uguale dal segmento GF parallelo a BC. Quanti metri è lungo il segmento DF?
(A) $(\sqrt{2} - 1)$, **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(C)** $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **(E)** $\frac{1}{2}$.



Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca
Scuola Normale Superiore

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

25 novembre 2015

- *La prova è costituita da 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** .
- *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 2 ore.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ______________________ COGNOME ______________________________ classe: __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Giulio sa che nel suo cassetto ci sono, tutti mischiati, 22 calzini neri, 30 calzini blu, 40 grigi e 28 marroni, tutti della stessa forma. Sta partendo e vuole portare almeno due paia di calzini ben abbinati, di due diversi colori (i due calzini di ciascun paio devono avere lo stesso colore, ma le due paia devono essere di colori differenti). Poiché è buio e non distingue i colori, prende un mucchio di calzini alla rinfusa. Quanti calzini dovrà mettere in valigia, come minimo, per avere la certezza di portarne almeno due paia ben abbinati di due diversi colori?
(A) 33 **(B)** 68 **(C)** 71 **(D)** 6 **(E)** 44

2. Qual è la 2015^a cifra dopo la virgola della scrittura decimale di $4/7$?
(A) 7 **(B)** 1 **(C)** 5 **(D)** 2 **(E)** 4

3. Andrea, Beatrice, Chiara, Davide, Enea e Federico sono molto amici. La loro età media è di 16 anni. Se a loro si uniscono tre amici di Enea, l'età media dell'intero gruppo diventa di 18 anni. Qual è l'età media dei tre amici di Enea?
(A) 18 **(B)** 19 **(C)** 22 **(D)** 21 **(E)** 20

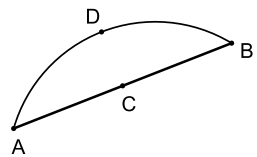
4. Laura ha ricevuto in regalo 150 dadi da gioco, di tipo molto particolare: ciascun dado ha quattro facce con il numero 1 e due facce con il 4. Laura sta per lanciare i 150 dadi tutti assieme, poi farà la somma dei 150 numeri usciti. Quanti sono i possibili valori di questa somma?
(A) 601 **(B)** 450 **(C)** 151 **(D)** 600 **(E)** 451

5. Sull'isola dei cavalieri e dei furfanti, i cavalieri sono sempre sinceri ed i furfanti mentono sempre. Durante una riunione, i presenti si siedono attorno a un grande tavolo e ciascuno dice: "la persona alla mia sinistra è un furfante". Sapendo che tra i presenti ci sono meno di 100 cavalieri, quale dei seguenti potrebbe essere il numero dei partecipanti alla riunione?
(A) 209 **(B)** 94 **(C)** 135 **(D)** 167 **(E)** 206

6. Giovanni vuole ridipingere, ciascuna a tinta unita, le 4 pareti della sua stanza quadrata. Avendo a disposizione vernice rossa, vernice gialla e vernice blu (che non si possono mescolare), vuole fare in modo che due pareti adiacenti non abbiano mai lo stesso colore. In quanti modi Giovanni può scegliere di colorare la stanza?
(A) 18 **(B)** 24 **(C)** 12 **(D)** 36 **(E)** 30

7. Qual è la cifra delle unità di $7^{(8^9)}$?
(A) 5 **(B)** 3 **(C)** 9 **(D)** 7 **(E)** 1

8. È stato ritrovato un frammento di un antico piatto circolare ormai rotto, della forma in figura. C è il punto medio del segmento AB, mentre D è il punto medio dell'arco AB. Sapendo che AB misura 30 cm e CD misura 5 cm, di quanti cm era il raggio del piatto originale?
(A) 18 **(B)** 21 **(C)** 20 **(D)** 25 **(E)** 27



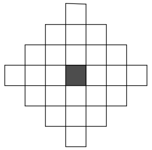
9. Indichiamo con 40! il numero ottenuto moltiplicando tutti i numeri interi da 1 a 40, vale a dire $40! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40$. Tra i numeri interi maggiori di 40 che sono divisori di 40!, trovare i sei più piccoli ed indicare la loro somma.
(A) 268 **(B)** 270 **(C)** 261 **(D)** 263 **(E)** 274

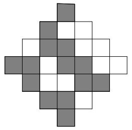
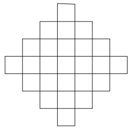
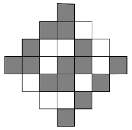
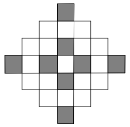
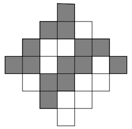
10. Nell'etichetta con la lista degli ingredienti di un prodotto dolciario, si può leggere: zucchero, cacao, nocciole 16%, olio di palma, latte 4%. Sapendo che gli ingredienti sono disposti in ordine (nessun ingrediente può essere presente in quantità maggiore di un altro elencato in precedenza), qual è la percentuale massima di cacao che il dolciume potrebbe contenere?
(A) 22% **(B)** 21% **(C)** 40% **(D)** 38% **(E)** 80%

11. Nel pentagono $ABCDE$, gli angoli nei vertici A, C, E sono retti. Si sa inoltre che $\overline{AB} = 16\,\mathrm{m}$, $\overline{BC} = 12\,\mathrm{m}$, $\overline{CD} = 5\,\mathrm{m}$, $\overline{DE} = 21\,\mathrm{m}$. Di quanti m^2 è l'area del pentagono?
(A) 270 **(B)** 236 **(C)** 240 **(D)** 244 **(E)** 252

12. Carlo ha dimenticato il codice di sblocco del suo telefono. Tutto ciò che ricorda è che il codice è composto di 4 cifre ed il prodotto di tali cifre è 24. Quanti sono i possibili codici che rispettano queste condizioni?
(A) 60 **(B)** 48 **(C)** 56 **(D)** 64 **(E)** 40

13. Una griglia suddivisa in quadratini è colorata inizialmente come nella figura qui a lato. Una mossa consiste nello scegliere una riga oppure una colonna e invertire il colore di tutte le caselle in essa presenti. Quale, tra le seguenti configurazioni, è possibile ottenere facendo 10 mosse?



(A)

(B)

(C)

(D)

(E)


14. Gianni possiede 100 palline, numerate da 1 a 100. Un giorno, dopo essersi accorto di aver perso la pallina n°1, decide di colorare le 99 rimanenti, rispettando questa regola: ciascun numero deve avere lo stesso colore di tutti i suoi multipli. Al massimo, quanti diversi colori potrà usare Gianni per colorare le 99 palline?
(A) 25 **(B)** 15 **(C)** 8 **(D)** 11 **(E)** 2

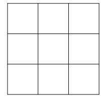
15. In una vite di forma cilindrica lunga 3 cm, il raggio di base misura $\sqrt{30}/\pi$ millimetri. Un minuscolo insetto cammina sulla superficie della vite, muovendosi lungo la filettatura. Sapendo che la filettatura compie precisamente 30 giri attorno alla vite, quanti centimetri percorrerà l'insetto per spostarsi da una estremità della vite all'altra?

(A) 32 **(B)** 30 **(C)** 33 **(D)** 36 **(E)** 31

16. Un ciclista e un podista percorrono la medesima strada rettilinea, tra i punti A e B. Ciascuno dei due si muove a velocità costante e, appena arrivato a fine percorso, riparte subito in direzione opposta, sempre alla solita velocità. I due partono nello stesso istante, il ciclista da A e il podista da B; il primo procede a una velocità tripla del secondo. Si incontrano per la prima volta a 12 km da B. A quanti km di distanza da A si incontreranno la seconda volta?
(A) 24 **(B)** 18 **(C)** 36 **(D)** 27 **(E)** i dati non bastano a determinarlo

17. Un triangolo possiede una bisettrice e una mediana tra loro perpendicolari, di lunghezze, rispettivamente, 7 e 8. Qual è l'area del triangolo?
(A) 36 **(B)** 35 **(C)** 42 **(D)** 48 **(E)** 28

18. Tommaso, per passare il tempo, si diverte a riempire una griglia quadrata 3×3 usando tutti i numeri da 1 a 9, in modo che la somma dei numeri su ciascuna riga e su ciascuna colonna sia sempre la stessa. In quanti modi Tommaso può riempire la griglia?



(A) 72 **(B)** 69 **(C)** 64 **(D)** 70 **(E)** 75

19. Un quadrato di lato 2 metri è suddiviso in quattro quadratini più piccoli di lato la metà. Una formica, posta inizialmente in un vertice del quadrato grande, è libera di camminare lungo i lati dei quadratini. Dopo aver camminato un po', percorrendo almeno una volta tutti i lati dei quadratini, la formica torna al punto iniziale. Quanti metri avrà percorso come minimo?
(A) 14 **(B)** 16 **(C)** 15 **(D)** 12 **(E)** 18

20. Sette amici stanno cenando tutti attorno a un tavolo. Qualcuno deve andare a preparare il dolce. Nella comitiva vale la regola che nessuna coppia di persone sedute accanto può mai alzarsi contemporaneamente. In quanti modi può essere scelto il gruppo (di una o più persone) incaricato di occuparsi del dolce?
(A) 29 **(B)** 27 **(C)** 21 **(D)** 28 **(E)** 24

Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

Scuola Normale Superiore

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2016

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** *: una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate.*

- *Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*

- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

  Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
  Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ______________________ COGNOME ______________________________ classe: __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Una squadra di 16 persone partecipa ad un torneo sportivo. Il regolamento prevede che in campo siano presenti sempre 11 giocatori per squadra e che, nel corso di ogni partita (la cui durata è di 90 minuti) i 16 componenti di ogni squadra devono giocare tutti lo stesso numero di minuti. Per quanti minuti sarà in campo ciascun giocatore durante la partita?
(A) meno di 57 **(B)** tra 57 e 60 **(C)** tra 60 e 63 **(D)** tra 63 e 66 **(E)** più di 66

2. Quattro amici si sono stancati dei loro portachiavi e decidono di ridistribuirseli, in modo tale che ciascuno di loro ne abbia uno differente da quello che aveva prima. In quanti modi diversi possono scambiarsi i portachiavi?
(A) 9 **(B)** 11 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 8

3. Il prodotto di due numeri naturali è 600000. Quale può essere, al massimo, il loro Massimo Comune Divisore?
(A) 100 **(B)** 3000 **(C)** 1 **(D)** 200 **(E)** 600

4. Alberto, Barbara, Carlo e Daria partecipano a un gioco. All'inizio, con un sorteggio, ad ognuno viene assegnato un numero: ad Alberto $2^{101} + 2^{121} + 2^{180}$, a Barbara $2^{100} + 2^{202} + 2^{400}$, a Carlo $2^{101} + 2^{109}$, a Daria $2^{100} + 2^{108}$. Poi si svolgono vari turni: in ogni turno, ciascun giocatore dimezza il proprio numero (se esso è pari), oppure esce dal gioco (se è dispari). Vince chi esce per ultimo dal gioco (può darsi che più giocatori vincano ex aequo). Chi vincerà la sfida?
(A) solo Alberto **(B)** Alberto e Carlo **(C)** solo Barbara
(D) Carlo e Daria **(E)** Barbara e Daria

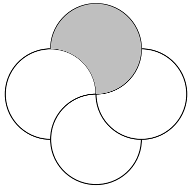
5. Sei persone (due con una maglia rossa, due con una maglia azzurra, due con una maglia gialla), per giocare a briscola, vogliono suddividersi in tre squadre di due persone ciascuna. In quanti modi possono effettuare la suddivisione, facendo sì che i due di ciascuna squadra abbiano maglie di colori differenti?
(A) 24 **(B)** 8 **(C)** 11 **(D)** 4 **(E)** 15

6. Ogni anno si svolge la gara a squadre delle Olimpiadi di Grammatica. Una regola impone che ciascuna squadra sia formata da tanti membri quante sono le squadre partecipanti quell'anno. Inoltre, si è notato che ogni anno il numero di squadre partecipanti aumenta esattamente di 1. Indicando con x il numero complessivo di persone partecipanti alla gara del 2016 e con y il numero di persone partecipanti alla gara del 2000, cosa si può affermare con sicurezza riguardo al valore di $x - y$?
(A) che è divisibile per 32 **(B)** che è un quadrato perfetto
(C) che è un numero primo **(D)** che è divisible per 101 **(E)** che è dispari

7. Ad un torneo di calcio partecipano solo 4 squadre, chiamate A, B, C, D. Ad ogni giornata, ciascuna squadra gioca una partita e, nel corso del torneo, ciascuna squadra incontra ogni altra precisamente una volta. Dopo le prime due giornate, la squadra A ha subito 1 rete e ne ha segnate 3, la squadra B ha segnato 4 reti senza subirne, la squadra C ha segnato 1 rete senza subirne, la squadra D ha subito 7 reti senza segnarne. Tenendo conto che si guadagnano 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per ogni pareggio e nessun punto in caso di sconfitta, indicare quanti punti hanno realizzato, rispettivamente, le squadre A, B, C, D (in questo ordine) nelle prime due giornate.
(A) $4, 6, 1, 0$ **(B)** $4, 4, 2, 0$ **(C)** $4, 3, 2, 1$ **(D)** $1, 6, 4, 0$ **(E)** $3, 4, 4, 0$

8. Un motorino e una bicicletta percorrono un grande tracciato di forma quadrata, partendo nello stesso istante da uno dei vertici e procedendo ambedue in senso orario. Il lato del tracciato misura 90 km. Il motorino viaggia alla velocità costante di 65 km orari, la bicicletta a 30 km orari. Dopo quante ore i due si incontreranno di nuovo in uno dei quattro vertici del tracciato?
(A) 7 **(B)** 72/7 **(C)** 30/7 **(D)** 72 **(E)** non accadrà mai più

9. La figura qui a lato è formata da 4 archi tra loro congruenti di circonferenze aventi raggio 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?
(A) $3 - \pi/4$ **(B)** $1 + \pi/2$ **(C)** $\pi - 1/2$
(D) $2 + \pi/4$ **(E)** $4 - \pi/2$



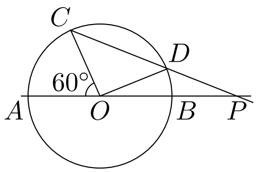
10. Romeo è libero dal lavoro tutte le domeniche (e nessun altro giorno). Giulietta lavora su una nave da crociera: rimane in mare per 10 giorni, poi ha due giorni liberi prima di imbarcarsi di nuovo per altri 10 giorni, e così via. Oggi, mercoledì 23 novembre 2016, Giulietta è a terra e s'imbarcherà domani. Quante giornate potranno trascorrere insieme Romeo e Giulietta fino al 23 novembre 2017?
(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 7 **(E)** 5

11. Qual è il più grande fattore primo di $3^{12} - 1$?
(A) 73 **(B)** $3^6 + 1$ **(C)** 107 **(D)** 13 **(E)** 949

12. Si lanciano due dadi da gioco di colore rosso e un dado azzurro. Qual è la probabilità che la somma dei punteggi dei dadi rossi sia uguale al punteggio del dado azzurro?
(A) 1/12 **(B)** 2/27 **(C)** 1/15 **(D)** 1/18 **(E)** 5/72

13. Quale tra questi numeri è il più piccolo?
(A) $\frac{\sqrt{2018}}{2017}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2019}}{2018}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ **(E)** $\frac{\sqrt{2020}}{2019}$

14. Data un circonferenza γ avente centro O e diametro AB lungo 12 cm, sia C un punto di γ tale che $A\widehat{O}C = 60°$, e sia P un punto sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, tale che $OD = DP$ (dove D è il punto d'intersezione tra PC e γ compreso tra C e P). Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}C$?
(A) 15° **(B)** $\frac{45°}{2}$ **(C)** 20° **(D)** 18° **(E)** 24°



15. Osservando il calendario, Chiara si è accorta che l'anno corrente 2016 ha una particolarità: posto $x = 2016$ il numero dell'anno, allora $x + 1$ è multiplo di 1, $x + 2$ è multiplo di 2, $x + 3$ è multiplo di 3 e $x + 4$ è multiplo di 4, ma $x + 5$ non è multiplo di 5. Quanti altri numeri interi positivi, minori di 2016, hanno la stessa particolarità?
(A) 141 **(B)** 83 **(C)** 167 **(D)** 134 **(E)** 149

16. Dato un triangolo EFG, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza ad esso circoscritta. Indichiamo con X il punto d'intersezione (diverso da F) della bisettrice dell'angolo $E\widehat{F}G$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e con Y il punto medio dell'arco $\widehat{EG}$ contenente F. Sapendo che $\overline{FX} = 12$ e $\overline{FY} = 5$, quanto misura il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$?
(A) 9 **(B)** 13/2 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 11/2

17. Le misure dei lati di un triangolo ABC sono: $\overline{AC} = \overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 12$ cm. Quanti cm misura la parte di perimetro di ABC formata dai punti per i quali la distanza da A è minore della distanza da C?
(A) 27/2 **(B)** 16 **(C)** 12 **(D)** 25/2 **(E)** 40/3

18. Una pulce si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano e può spostarsi sui punti a coordinate intere scegliendo di volta in volta una di queste tre mosse:

- dal punto (x, y) salta al punto $(x, y + 5)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x - 2, y - 3)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x + 4, y - 9)$.

Quanti sono i percorsi, realizzabili dalla pulce con le sue mosse, che la portano dall'origine $(0, 0)$ al punto $(0, 2016)$?
(A) nessuno **(B)** precisamente 1 **(C)** un numero compreso tra 5 e 20
(D) un numero compreso tra 20 e 100 **(E)** infiniti

19. Del quadrilatero convesso $ABCD$ si conoscono le misure dei lati AB, BC, CD e DA, che sono, nell'ordine, 4, 9, 6 e 11 cm. Indicati con E e F i punti medi dei lati AB e CD, si sa inoltre che l'area del quadrilatero $BEDF$ è di 18 cm^2. Di quanti cm^2 è l'area del quadrilatero $ABCD$?
(A) 27 **(B)** 36 **(C)** 24 **(D)** più di 50 **(E)** un valore tra 40 e 50

20. Dati dei numeri interi n e k, con $1 \leq k \leq n$, definiamo un polinomio, di grado $n - 1$, nel modo seguente:

$$p(x) = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{(x+k)}.$$

Ad esempio, se fosse $n = 5$ e $k = 2$, si avrebbe $p(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$. Supponiamo che, per una certa scelta di n e k, il coefficiente di x^{n-2} nel polinomio $p(x)$ sia uguale a 67. Qual è, in tal caso, il valore di n?
(A) 68 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 11 **(E)** 69

Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2017

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

  Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
  Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________________ COGNOME ______________________________ CLASSE __________

data di nascita: ____________ mail (facoltativa): ____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

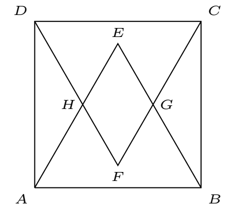
1. Quante sono le coppie di numeri interi positivi (m, n) tali che $m^n = 2^{24}$?
   (A) 2 **(B)** 8 **(C)** 1 **(D)** 6 **(E)** 4

2. Sei anni fa, l'età di Anna era il quintuplo dell'età di suo figlio Mario. Adesso, invece, è il triplo dell'età di Mario. Tra quanti anni l'età di Anna sarà il doppio dell'età di Mario?
   (A) 8 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 12

3. Con il simbolo $n!$ si indica il prodotto dei numeri interi positivi da 1 a n, ad esempio: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Consideriamo il numero $H = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2016! + 2017!$ (una somma con 2017 addendi). Qual è la cifra delle decine di H?
   (A) 5 **(B)** 7 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 6

4. Attorno a un tavolo circolare sono sedute 6 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere (che dice sempre la verità) o un furfante (che mente sempre). Ognuno dei presenti afferma: "Considerando i miei due vicini e la persona che è seduta proprio di fronte a me, esattamente due di queste tre persone sono furfanti". Quanti sono, in tutto, i cavalieri seduti al tavolo?
   (A) nessuno **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4
   (E) gli elementi forniti non sono sufficienti per stabilirlo

5. Nella figura qui a fianco, $ABCD$ è un quadrato di lato pari a 2 cm ed i triangoli ABE e CDF sono equilateri. Quanti cm^2 misura l'area del quadrilatero $FGEH$?
   (A) $\frac{8\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ **(E)** $\frac{1}{2}$



6. Una bottiglia da 33 cl di una bibita all'arancia è costituita per il 75% da acqua e per il 25% da succo d'arancia. Enrica vuole sostituire un po' della bibita contenuta in questa bottiglia con del succo d'arancia, in modo da ottenere una nuova bibita che sia costituita per il 50% da succo d'arancia. Quanti cl della bibita iniziale Enrica deve sostituire con del succo d'arancia?
   (A) 8,25 **(B)** 10 **(C)** 9, 75 **(D)** 12 **(E)** 11

7. Carlo scrive in una riga i numeri interi da 1 a 128 (inclusi). Poi inizia a cancellarne alcuni, in questo modo: cancella il numero 1, lascia il 2, cancella il 3, lascia il 4, etc. Arrivato in fondo alla riga, la ripercorre al contrario, cancellando il primo numero che trova tra quelli rimasti, lasciando poi il secondo, etc. Continua quindi a ripercorrere la riga alternativamente nei due sensi, cancellando ogni volta un numero sì e un numero no, fino a quando sulla lavagna resta un solo numero. Qual è quest'ultimo numero rimasto?
   (A) 86 **(B)** 54 **(C)** 70 **(D)** 22 **(E)** 38

8. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b), con $a < b$, tali che $MCD(a, b) = 2$ e $mcm(a, b) = 660$?
   (A) 0 **(B)** 8 **(C)** 3 **(D)** 10 **(E)** 5

9. Sia LMN un triangolo e sia P un punto sul lato MN. Supponiamo che si abbia $\widehat{MLP} = \widehat{LNP}$ e $\widehat{NLP} = \widehat{LMP}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?
   (A) $LN > LP$ **(B)** $MN \cdot LP > LM \cdot LN$ **(C)** $LP \leq \frac{MN}{2}$
   (D) $LM < MN$ **(E)** $MP \cdot NP = LP^2$

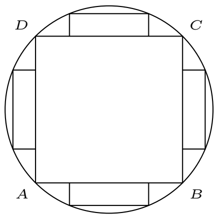
10. Alle 12 : 00 : 00 le lancette delle ore e dei minuti di un orologio sono sovrapposte. Dopo quanti minuti, per la prima volta, esse saranno allineate ed opposte?
(A) circa 30 **(B)** circa 98 **(C)** circa 100 **(D)** circa 33 **(E)** circa 34

11. Silvia e Luigi si sfidano lanciando più volte un dado. Ogni volta che esce un numero pari fa un punto Silvia, quando esce un numero dispari fa un punto Luigi. Vince la partita chi arriva per primo a 5 punti. Dopo 5 lanci, Silvia è in vantaggio per 4 a 1. Qual è la probabilità che sia Silvia a vincere la partita?
(A) 4/5 **(B)** 5/6 **(C)** 7/8 **(D)** 3/4 **(E)** 15/16

12. L'area del triangolo ABC è pari a 60 m^2. Siano D, E i punti interni al lato AC tali che $AD = DE = EC$ e siano F, G, H i punti interni ad AB tali che $AF = FG = GH = HB$. Qual è l'area del triangolo DEG?
(A) 20 m^2 **(B)** 15 m^2 **(C)** 10 m^2 **(D)** 12 m^2 **(E)** 18 m^2

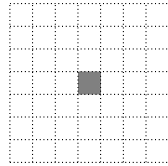
13. Per ciascun giocatore di scacchi ogni mese viene calcolato un punteggio, derivante dai suoi risultati e reso noto pubblicamente, che indica il suo livello di abilità in quel momento. Gerardo sta per iniziare un torneo di scacchi con 64 partecipanti, che si svolge ad eliminazione diretta (prima i 32imi di finale, poi i 16esimi, poi gli ottavi, etc.): chi vince una partita passa il turno, l'altro è eliminato (in caso di patta, si ripete la partita). La precedente edizione del torneo è stata molto avara di sorprese: in ogni partita ha sempre vinto il giocatore con punteggio più alto. Prima del sorteggio del tabellone (che avviene in modo casuale tra tutti i partecipanti), Gerardo si informa sugli altri giocatori presenti (che hanno tutti punteggi diversi) e conclude che, se tutto dovesse andare ancora come nella precedente edizione, egli potrebbe al massimo arrivare in semifinale. Se ne deduce che, tra i partecipanti al torneo, il punteggio di Gerardo...
(A) può trovarsi in qualsiasi posizione successiva alla 32^a
(B) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 32^a alla 48^a (incluse)
(C) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 50^a
(D) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 49^a
(E) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 34^a alla 49^a (incluse)

14. Un quadrato $ABCD$ di lato pari a 2 cm è inscritto in una circonferenza. Nei segmenti circolari delimitati dai lati del quadrato vengono inscritti 4 rettangoli. Quanti cm deve misurare ciascun lato di tali rettangoli, affinché essi siano dei quadrati?
(A) $\sqrt{2}/4$ **(B)** 1/3 **(C)** 3/8 **(D)** 2/5 **(E)** 1/4



15. Quanti sono i numeri primi tali che, se si cancella da essi un qualsiasi gruppo di cifre anche non consecutive (senza però cancellarle tutte) e si leggono le cifre rimanenti nell'ordine in cui si trovano, si ottiene ancora un numero primo?
(Si ricorda che 1 non è un numero primo.)
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 3

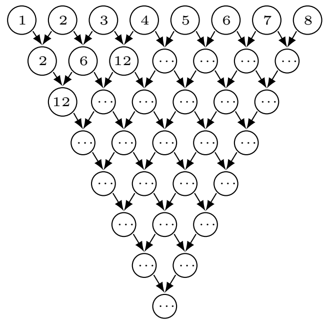
16. Presa una griglia 7×7, consideriamo i possibili quadrati (da 1×1 a 7×7) ottenuti dall'unione di una o più caselle della griglia. Quanti tra questi quadrati contengono la casella centrale della griglia?
(A) 50 **(B)** 30 **(C)** 44 **(D)** 42 **(E)** 28



17. Carolina inizia a scrivere tutti gli interi positivi pari, uno di seguito all'altro: 246810121416... Quale cifra occuperà la 2017^a posizione?
(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 1

18. In un polinomio di 5° grado $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, ciascuno dei coefficienti a, b, c, d, e, f è 1 oppure -1. Sapendo che si ha $p(2) = 11$, qual è il valore di $p(3)$?
(A) 178 **(B)** 244 **(C)** 126 **(D)** 142 **(E)** 196

19. Dopo aver disegnato uno schema triangolare come quello qui a fianco, Roberto scrive nei cerchi della riga più in alto i numeri interi da 1 a 8. Poi, dentro ciascuno degli altri cerchi, scrive il prodotto dei numeri contenuti nei due cerchi sopra di esso che sono ad esso collegati con una freccia (dunque ottiene 2, 6, 12, ... e così via). Con quanti zeri terminerà il numero che dovrà scrivere nel cerchio più in basso?
(A) 35 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 32 **(E)** 33



20. Dato un rettangolo $ABCD$, sia P un punto interno al lato CD. La retta AP interseca la retta BC nel punto T. Detto M il punto medio del lato BC, è noto che $\widehat{APM} = 2\,\widehat{ATC}$. Sapendo che l'area del triangolo CPT è di 10 cm^2, qual è l'area del rettangolo $ABCD$?
(A) 90 cm^2 **(B)** 120 cm^2 **(C)** 60 cm^2 **(D)** 80 cm^2 **(E)** 160 cm^2

Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

22 novembre 2018

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________________ COGNOME ______________________________ CLASSE __________

data di nascita: ____________ mail (facoltativa): ____

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

1. Indicare la più grande tra queste frazioni.
(A) $\frac{2018}{2011}$ **(B)** $\frac{2016}{2009}$ **(C)** $\frac{2020}{2013}$ **(D)** $\frac{2019}{2012}$ **(E)** $\frac{2025}{2018}$

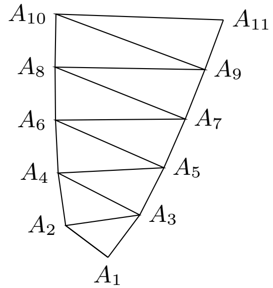
2. Sia Luca che Claudia hanno in mano due carte rosse e due nere. Claudia pesca una carta a caso dalla mano di Luca e l'aggiunge alle proprie. A questo punto, Luca pesca una carta dalla mano di Claudia. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte rosse e due carte nere?
(A) 2/3 **(B)** 2/5 **(C)** 3/5 **(D)** 3/4 **(E)** 1/2

3. Piero costruisce un cubo incollando 1000 piccoli cubetti tutti uguali (con 10 cubetti lungo ogni spigolo). Dipinge quindi di verde tutte le facce del cubo che ha costruito. Quanti dei cubetti iniziali avranno almeno una faccia colorata di verde?
(A) 600 **(B)** 384 **(C)** 504 **(D)** 488 **(E)** 592

4. Quale dei seguenti numeri si può ottenere sommando i quadrati di due numeri interi multipli di 3?
(A) 459 **(B)** 363 **(C)** 633 **(D)** 495 **(E)** 549

5. Un cellulare con la batteria del tutto scarica deve rimanere in carica 2 ore per ricaricarsi completamente, se nel frattempo non è in uso. Se invece è utilizzato durante la ricarica, il 40% dell'energia introdotta viene subito consumata e solo la parte restante si accumula nella batteria. Sapendo che, per ricaricare la batteria da zero, sono servite 2 ore e mezza, stabilire per quanti minuti il cellulare è stato utilizzato durante la ricarica (si suppone, che si usi o meno il telefono, che l'energia immagazzinata in un intervallo di tempo sia proporzionale alla sua durata).
(A) 72 **(B)** 90 **(C)** 60 **(D)** 87 **(E)** 75

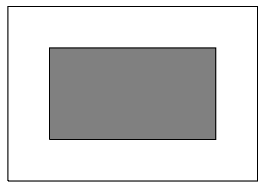
6. Teodoro sta costruendo una sequenza di triangoli rettangoli, disposti come qui a lato. Il primo è il triangolo isoscele $A_1A_2A_3$, rettangolo in A_1, con cateti di 1 cm. Il secondo è $A_2A_3A_4$, rettangolo in A_2, dove A_2A_4 è ancora di 1 cm. Il terzo è $A_3A_4A_5$, rettangolo in A_3, con A_3A_5 ancora di 1 cm. La costruzione va avanti così: in ciascun triangolo $A_nA_{n+1}A_{n+2}$, rettangolo in A_n, il cateto A_nA_{n+2} è sempre di 1 cm. Quanti cm misurerà il segmento $A_{900}A_{901}$?
(A) 60 **(B)** 300 **(C)** 30 **(D)** 45 **(E)** 150



7. Per prepararsi ai Giochi di Archimede, Costanza sta cercando di risolvere una raccolta di quesiti tratti dalle gare degli anni passati. Ne lascia in bianco 14 e risponde correttamente a 2/3 dei rimanenti (le altre risposte sono invece sbagliate). Si accorge quindi che, calcolando i punteggi come si fa nei Giochi di Archimede, ha così realizzato un punto in meno di quanto avrebbe ottenuto rispondendo a tutte le domande e sbagliandone precisamente la metà. Circa il numero di quesiti della raccolta, si può concludere che esso è...
(A) minore di 30 **(B)** fra 30 e 33 (inclusi) **(C)** fra 34 e 36 (inclusi) **(D)** fra 37 e 40 (inclusi) **(E)** maggiore di 40

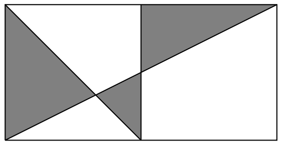
8. Scrivendo per esteso il numero intero $(10^{2018} + 2018)^2$ si utilizzano 4037 cifre. Qual è la somma di tutte queste cifre?
(A) 36 **(B)** 31 **(C)** 42 **(D)** 51 **(E)** 43

9. Il lato maggiore della cornice di un quadro è 8/5 del minore. La cornice ha lo stesso spessore su tutti e quattro i lati. Nel quadro all'interno della cornice (rappresentato con un rettangolo grigio), il lato maggiore è doppio del lato minore. Qual è il rapporto tra l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice e l'area del quadro all'interno della cornice?
(A) 7/3 **(B)** 20/9 **(C)** 8/5 **(D)** 12/5 **(E)** 64/25



10. Un pasticcere ha in negozio confetti di 12 gusti diversi e vuole confezionare bomboniere contenenti ciascuna 3 confetti, non necessariamente di gusti differenti. Quante bomboniere diverse può realizzare al massimo? (due bomboniere sono da considerare uguali se contengono confetti degli stessi gusti e nelle stesse quantità)
(A) 364 **(B)** 320 **(C)** 324 **(D)** 360 **(E)** 348

11. Nella figura qui a fianco, è rappresentato un rettangolo diviso in due quadrati uguali. Il lato di ciascuno dei due quadrati è pari a 6 cm. Di quanti cm^2 è l'area complessiva della regione ombreggiata?
(A) 33 **(B)** 30 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 21



12. Anna ha riscritto per tre volte di fila un numero intero di due cifre, ottenendo così un numero S di sei cifre. Il numero S è sicuramente divisibile per...
(A) 1111 **(B)** 101 **(C)** 11 **(D)** 111 **(E)** 1001

13. La circonferenza β ha centro nel punto B e raggio 40. Le circonferenze α e γ, di centri rispettivamente A e C, hanno lo stesso raggio r e sono entrambe tangenti esternamente a β. I tre centri A, B, C sono allineati. Sapendo che le rette passanti per A e tangenti a β sono tangenti anche a γ, che cosa si può affermare a proposito del raggio r?
(A) $r < 72$ **(B)** $72 \leq r < 75$ **(C)** $75 \leq r < 78$
(D) $78 \leq r < 81$ **(E)** $r \geq 81$

14. Tre ragazzi e due ragazze debbono sedersi attorno a un tavolo con sei sedie, numerate da 1 a 6. Per decidere il proprio posto, ciascuno dei cinque estrae a sorte uno tra sei foglietti (numerati da 1 a 6). Qual è la probabilità che la sedia che rimane vuota venga a trovarsi tra un ragazzo e una ragazza?
(A) 2/5 **(B)** 1/2 **(C)** 3/5 **(D)** 1/3 **(E)** 3/4

15. Giulia scrive i numeri interi positivi in una griglia con 7 colonne, come mostrato in figura. Poiché ha in antipatia il numero 11, nel suo elenco mancano tutti i multipli di 11. Indichiamo con $(m; n)$ la casella che si trova nella riga numero m (contando dall'alto) e nella colonna numero n (contando da sinistra): ad esempio, la casella $(2; 4)$ contiene il numero 12. In quale casella sarà contenuto il numero 2018?
(A) $(289; 2)$ **(B)** $(263; 1)$ **(C)** $(278; 5)$
(D) $(262; 4)$ **(E)** $(288; 2)$

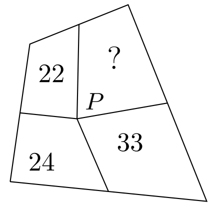
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	···	···	···	···	···
···	···	···	···			
···						

16. Nel triangolo isoscele ABC, dove $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\,\text{cm}$ e $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$, la mediana uscente dal vertice B e la bisettrice uscente dal vertice C si intersecano nel punto D. Di quanti cm^2 è l'area del triangolo BCD?
(A) $\frac{32}{7}$ **(B)** $\frac{21}{5}$ **(C)** $\frac{17}{4}$ **(D)** 4 **(E)** $\frac{14}{3}$

17. Si consideri l'equazione $ax^2 - bx + a = 0$ nell'incognita x, dove a e b sono numeri reali positivi. Tra le seguenti 5 affermazioni, quante sono quelle vere?
- Se $b > 2a$, ci sono due soluzioni reali distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali distinte, esse sono positive.
- Se una delle soluzioni è 9 volte l'altra, allora $b > 3a$.
- Qualunque siano a e b, non possono esserci due soluzioni intere distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali, il loro prodotto è 1.

(A) solo 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** tutte e 5

18. Da un punto P all'interno di un quadrilatero convesso, si tracciano i segmenti che lo congiungono ai punti medi dei lati. In questo modo, il quadrilatero viene suddiviso in quattro regioni. Nella figura sono indicate le aree di tre di queste regioni. Qual è l'area della quarta?
(A) 32 **(B)** 30 **(C)** 27 **(D)** 31 **(E)** 29



19. Giovanna ha disposto 9 monetine in fila. Alcune mostrano la faccia con la testa, altre quella con la croce, in questa sequenza: `CCTTCTTCC`. Fa questo gioco: ad ogni mossa, sceglie due monete consecutive e le capovolge entrambe. Giovanna, con alcune mosse di questo tipo, vorrebbe ottenere una fila di monete disposte nella sequenza `TCTCTCTCT`. Che cosa si può concludere?
(A) Non ci può riuscire.
(B) Ci può riuscire con un minimo di 4 mosse.
(C) Ci può riuscire con un minimo di 6 mosse.
(D) Ci può riuscire con un minimo di 8 mosse.
(E) Ci può riuscire con un numero dispari di mosse.

20. Cleopatra sta giocando con una fila formata da n^2 soldatini (dove n è un numero intero maggiore di 30). Per prima cosa, Cleopatra toglie dalla fila tutti i soldatini la cui posizione corrisponde a un quadrato (ossia il 1° soldatino, il 4°, il 9°, e così via). Completata questa procedura, Cleopatra forma una nuova fila con i soldatini rimasti e la ripete togliendo ancora tutti i soldatini la cui posizione nella nuova fila corrisponde a un quadrato. La cosa va avanti in questo modo, sempre con la stessa procedura. Quanti soldatini potrebbero essere rimasti quando Cleopatra, dopo aver completato varie volte la suddetta procedura, si stanca e smette di giocare?
(A) 126 **(B)** 132 **(C)** 125 **(D)** 140 **(E)** 120

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

21 novembre 2019

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, trascrivi* **IN STAMPATELLO** *la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni.*
- **ANNERISCI COMPLETAMENTE** *il tuo mese di nascita, il tuo genere, la tua classe. Scrivi le altre informazioni richieste* **IN STAMPATELLO** *vicino alle frecce, con la massima cura e precisione.*

Non è permesso l'uso di calcolatrici o strumenti di comunicazione.
Il tempo a tua disposizione è di 110 minuti. Buon lavoro!

NOME →
COGNOME →
ANNO DI NASCITA →
MESE DI NASCITA
GEN FEB MAR APR MAG GIU
LUG AGO SET OTT NOV DIC
GIORNO DI NASCITA →
GENERE **F** **M**
CLASSE **3** **4** **5**
SEZIONE →

GRIGLIA DELLE RISPOSTE **T1**

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

1. Nel triangolo DEF, le altezze (uscenti, rispettivamente, dai vertici D, E e F) misurano, nell'ordine, 84, 80 e 81 metri. Indicando con d, e, f le lunghezze, rispettivamente, dei lati EF, FD, DE, quale di queste disuguaglianze è corretta?
(A) $e < f < d$ **(B)** $d < f < e$ **(C)** $d < e < f$
(D) $f < e < d$ **(E)** $e < d < f$

2. Il prezzo di vendita di un bene si ottiene aumentando l'importo effettivo di una certa percentuale, detta IVA (una tassa, che poi viene versata al fisco). In un negozio, il prezzo di vendita di un maglione è di $61,00$ €, comprensivo di IVA al 22%. Se l'IVA passasse al 25%, quale diventerebbe il prezzo di vendita del maglione?
(A) $62,50$ € **(B)** $64,00$ € **(C)** $62,83$ € **(D)** $62,10$ € **(E)** $62,00$ €

3. Caterina sta saltando lungo una fila di mattonelle. Partendo dalla prima, con salti di 3 mattonelle alla volta (ossia, salta sulla 4^a, la 7^a, la 10^a, e così via), arriva sull'ultima; si volta indietro e, con salti di 4 mattonelle alla volta, torna alla prima; si volta ancora e, con salti di 5 mattonelle arriva di nuovo all'ultima mattonella; si volta di nuovo e, con salti di 6 mattonelle torna di nuovo alla prima. Quale tra i seguenti potrebbe essere il numero di mattonelle della fila?
(A) 391 **(B)** 271 **(C)** 301 **(D)** 270 **(E)** 360

4. Due uomini possiedono delle monete. Se il primo ne prendesse 3 dal secondo, allora ne avrebbe tante quante ne resterebbero al secondo. Se, invece, il secondo ne prendesse 1 al primo, allora ne avrebbe il triplo di quante ne resterebbero al primo. Quante monete possiedono i due uomini in totale?
(A) 14 **(B)** 18 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 16

5. I numeri reali x e y verificano l'uguaglianza $(6x - 5y)^4 + (4y - 3)^6 = 0$.
Qual è il valore di $x + y$?
(A) 1 **(B)** 10/7 **(C)** 4/3 **(D)** 13/9 **(E)** 11/8

6. Il prodotto di due numeri naturali è 2160. Il loro Massimo Comune Divisore è dispari e maggiore di 1. Indicando con m il minimo comune multiplo dei due numeri, si ha:
(A) $m < 200$ **(B)** $200 < m < 400$ **(C)** $400 < m < 600$
(D) $600 < m < 800$ **(E)** $m > 800$

7. I tre vertici di un triangolo rettangolo avente un angolo di 54° sono anche vertici di un poligono regolare avente...
(A) 12 lati **(B)** 25 lati **(C)** 30 lati **(D)** 24 lati **(E)** 16 lati

8. Un decagono convesso possiede 10 angoli interni.
Quanti di essi, al massimo, possono essere retti?
(A) 5 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 2 **(E)** 6

9. Quanti multipli di 7, compresi tra 1 e 6000, sono quadrati di numeri interi?
(A) 9 **(B)** 20 **(C)** 77 **(D)** 11 **(E)** 122

10. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Si sa che l'angolo in A è retto e che $\overline{AB} = 24$, $\overline{BC} = 20$, $\overline{CD} = 15$. Qual è la misura di DA?
(A) 11 **(B)** 27 **(C)** 10 **(D)** 19 **(E)** 7

11. Marco possiede due dadi. Uno dei due è un normale dado da gioco, con facce numerate da 1 a 6. L'altro è invece un dado speciale, che possiede due facce con il numero 3, una faccia con il 4 e tre facce con il 6. Lanciando insieme i due dadi, qual è la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia uguale a 10?

(A) 2/9 **(B)** 1/18 **(C)** 1/9 **(D)** 1/6 **(E)** 1/12

12. È assegnato un trapezio rettangolo $PQRS$, con angoli retti in P e in S, dove $\overline{PQ} > \overline{RS}$ e $\overline{PS} = 2\,\overline{RS} = 62/5$. Sia K il punto sul lato PS tale che $\overline{PK} = 8$. Sapendo che $\widehat{SKR} = \widehat{PQR}$, quale sarà la misura di KQ?

(A) 17 **(B)** 13 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** 20

13. Romeo, Giuletta, Elena, Paride, Achille, Ulisse si siedono su una panchina. Giulietta vuole sedere accanto a Romeo ed Elena accanto a Paride. In quanti modi possono disporsi i sei da destra verso sinistra, in modo da accontentarle?

(A) 720 **(B)** 120 **(C)** 24 **(D)** 96 **(E)** 180

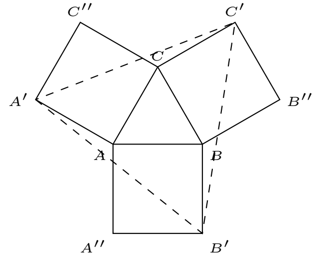
14. Ogni post pubblicato sulla pagina Instagram delle Olimpiadi di Matematica deve avere 2 oppure 3 hashtag, scelti tra 10 hashtag prestabiliti. Gli amministratori della pagina rispettano questa regola: se in un post è presente l'hashtag "#ItaMO", deve esserci anche "#cese2020"(sono due dei 10 hashtag). In quanti modi può essere scelto l'insieme di hashtag da inserire in un post?

(A) 120 **(B)** 93 **(C)** 165 **(D)** 90 **(E)** 129

15. Attorno a un tavolo ci sono 10 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere o un furfante. Ogni volta che parla un cavaliere, la frase che pronuncia è vera; ogni volta che parla un furfante, la frase che pronuncia è falsa. Uno di loro pronuncia la seguente frase: "alla mia destra siede un cavaliere e alla mia sinistra siede un furfante". Il vicino di destra di costui dichiara: "alla mia sinistra siede un cavaliere e alla mia destra siede un furfante". Il vicino di destra di quest'ultimo afferma: "alla mia destra siede un cavaliere e alla mia sinistra siede un furfante". E così via, le frasi si alternano, fino alla decima persona, che afferma: "alla mia sinistra siede un cavaliere e alla mia destra siede un furfante". Si può concludere che, tra le 10 persone presenti, il numero complessivo di cavalieri...

(A) è possibile che sia 0, 2, 4, 6 o anche 8, ma non 10
(B) è possibile che sia 0, 2 o 4, ma non 6, 8 o 10
(C) è possibile che sia 0, 2, 4 o anche 6, ma non 8 o 10
(D) è possibile che sia 2, 4 o 6, ma non 0, 8 o 10
(E) è sicuramente 5

16. Sui lati del triangolo equilatero ABC, che hanno lunghezza 1, sono costruiti tre quadrati, come in figura. Qual è il perimetro del triangolo $A'B'C'$?

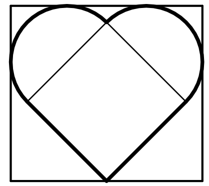


(A) $3\sqrt{4+\sqrt{3}}$ **(B)** 6 **(C)** $3\sqrt{1+2\sqrt{3}}$
(D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ **(E)** $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$

17. Carla lancia, tutti insieme, 4 dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6 Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia 24?

(A) 5/162 **(B)** 7/324 **(C)** 1/36 **(D)** 13/324 **(E)** 5/144

18. Gli amministratori della pagina Instagram delle Olimpiadi di Matematica si sono accorti che l'icona corrispondente ai "mi piace" ricevuti è a forma di cuore, composta da un quadrato e due semicerchi costruiti su lati consecutivi. La figura è inscrivibile in un rettangolo con i lati paralleli alle diagonali del quadrato, come qui a fianco. Sapendo che il quadrato ha lato 1 cm, quanti cm^2 misura l'area del rettangolo?



(A) $3\sqrt{2}-2$ **(B)** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $\frac{7}{8}(1+\sqrt{2})$
(D) $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ **(E)** $\frac{5}{4}+\sqrt{2}$

19. Consideriamo un puzzle di forma quadrata, con n pezzi per lato. Ogni pezzo ha 4 lati e su ciascun lato può esserci o un buco o una sporgenza, oppure può essere piatto (quando si trova sul bordo). Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) Se il numero complessivo di pezzi è multiplo di 21, anche il numero di buchi deve essere multiplo di 21.
(B) Il numero complessivo di buchi è uguale al numero di sporgenze.
(C) Se il numero complessivo di pezzi è multiplo di 25, anche il numero di buchi deve essere multiplo di 25.
(D) Il numero complessivo di sporgenze è multiplo di 4.
(E) Se il numero complessivo di pezzi è dispari, anche il numero di pezzi che non hanno lati piatti deve essere dispari.

20. Dato un triangolo DEF, ottusangolo in E, sia O il centro della circonferenza ad esso circoscritta. Detto P il punto nel quale la bisettrice uscente da E interseca il lato DF, è noto che il quadrilatero convesso $FEPO$ è inscrivibile in una circonferenza. Sapendo che $\widehat{EDF} = 52°$, qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{DFE}$?

(A) 24° **(B)** 22° **(C)** 26° **(D)** 30° **(E)** 28°

I Giochi di Archimede 2020/2021

GARA DI RISERVA TRIENNIO – – CODICE PROVA: TT01

1. Andrea sta provando dei vestiti in un negozio. È indeciso tra 4 camicie, 5 maglioni, 4 felpe e 3 pantaloni. Comprerà precisamente tre capi, tutti di tipo diverso (ossia non due camicie e un maglione o tre pantaloni, etc.). In quanti modi Andrea potrà fare i suoi acquisti?

   (A) 248 **(B)** 342 **(C)** 262 **(D)** 294 **(E)** 326

2. Martina compra dei libri, che costano in tutto 141 euro. Ha in tasca 40 banconote da 5 euro e 80 monete da 2 euro. In quanti modi diversi Martina potrà pagare i libri in maniera precisa (senza ricevere alcun resto)?

   (A) 13 **(B)** 15 **(C)** 28 **(D)** 14 **(E)** 26

3. Quanti sono i possibili triangoli non degeneri (ossia di area non nulla), tra loro non congruenti, in cui la lunghezza di ciascun lato è una tra le misure 2, 3, 4, 5 ?

   (A) 17 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 16

4. Quanti sono i numeri pari di tre cifre tutte diverse tra loro, dove sono presenti sia la cifra 0 che la cifra 7?

   (A) 18 **(B)** 20 **(C)** 22 **(D)** 23 **(E)** 19

5. Indicare il massimo numero intero n tale che 24^n sia un divisore di 60^{100}.

   (A) 73 **(B)** 76 **(C)** 66 **(D)** 80 **(E)** 83

6. Lanciando 4 dadi da gioco, con facce da 1 a 6, qual è la probabilità che il prodotto dei numeri usciti sia 36?

   (A) 1/27 **(B)** 5/108 **(C)** 5/36 **(D)** 7/216 **(E)** 7/144

7. Francesco prende il sole su una piattaforma quadrata $ABCD$ di lato di 4 metri, circondata dall'acqua. Per una scommessa, si mette in piedi nel punto della piattaforma distante 1 metro dai lati AB e BC. Poi, bendato, cammina in una direzione a caso per 2 metri. Qual è la probabilità che Francesco finisca in acqua?

   (A) 1/2 **(B)** 3/4 **(C)** 2/3 **(D)** 7/12 **(E)** 9/16

8. Per riempire una vasca d'acqua ci sono due rubinetti uguali. Lasciando aperto solo uno dei due, la vasca si riempie in 24 minuti. Per abbreviare i tempi, quando la vasca è riempita per metà dall'acqua proveniente da un rubinetto, viene aperto anche il secondo rubinetto. Così facendo, quanti minuti impiega in tutto la vasca a riempirsi?

   (A) 12 **(B)** 16 **(C)** 18 **(D)** 15 **(E)** 20

9. In un'isola vivono due categorie di persone: i cavalieri (che dicono sempre il vero) ed i furfanti (che dicono sempre il falso). Ad un banchetto, ci sono 9 tavoli con 3 persone sedute, 8 tavoli con 4 persone, 5 tavoli con 5 persone e 10 tavoli con 6 (tutti tavoli circolari). Ciascuno dei presenti afferma: *"le due persone accanto a me sono di due categorie diverse"*. Quanti possono essere, come minimo, i furfanti presenti al banchetto?

   (A) 144 **(B)** 86 **(C)** 48 **(D)** 88 **(E)** 72

10. I lati CD, DE, EC di un triangolo CDE misurano, rispettivamente, 13 m, 17 m, 21 m. Le bisettrici uscenti dai vertici C e D intersecano i lati opposti nei punti F e G. Detta $\mathcal{A}$ l'area di CDE, qual è l'area del triangolo EFG?

    (A) $\frac{4}{9}\mathcal{A}$ **(B)** $\frac{7}{20}\mathcal{A}$ **(C)** $\frac{1}{3}\mathcal{A}$ **(D)** $\frac{1}{4}\mathcal{A}$ **(E)** $\frac{5}{14}\mathcal{A}$

11. Nel trapezio $PQRS$, di basi PQ e RS, sia T il punto d'intersezione delle diagonali PR e QS. Le aree dei triangoli RST e PST sono, rispettivamente, 12 mm^2 e 24 mm^2. Quanti mm^2 misura l'area del trapezio $PQRS$?

    (A) 105 **(B)** 108 **(C)** 100 **(D)** 104 **(E)** 102

12. Determinare tutti i numeri primi p tali che il polinomio $P(x) = x^2 - (43 - p)x + 5p$ abbia due radici intere positive. Indicare come risposta la somma dei suddetti numeri p.

    (A) 20 **(B)** 26 **(C)** 42 **(D)** 19 **(E)** 31

I Giochi di Archimede 2021

GARA TRIENNIO -- CODICE PROVA: 1101

1. Lungo una circonferenza sono segnati quattro punti rossi, tre punti verdi, due punti gialli, un punto blu. Quanti triangoli si possono ottenere scegliendo due vertici dello stesso colore ed il terzo di un altro colore?

   (A) 56 **(B)** 60 **(C)** 72 **(D)** 65 **(E)** 54

2. Sapendo che $(3x+2)(7-4x)(4x+7)=0$, quale può essere, al massimo, il valore di $5-\dfrac{3}{x}$?

   (A) 23/7 **(B)** 35/4 **(C)** 22/3 **(D)** 19/2 **(E)** 47/7

3. Nell'isola dove vivono solo cavalieri (che dicono sempre il vero) e furfanti (che dicono sempre il falso), l'ufficio postale è piuttosto affollato. Ci sono quattro file agli sportelli: una con 11 persone, una con 12, una con 13 e una con 14 persone. Ognuno dei presenti (tranne i primi tre di ciascuna fila) dice questa frase: "tra le persone davanti a me nella mia fila ci sono almeno tre furfanti". Quanti sono in tutto i cavalieri all'ufficio postale?

   (A) 25 **(B)** 32 **(C)** 38 **(D)** non si può stabilire **(E)** 42

4. Quale tra i seguenti è il quadrato di un numero intero?

   (A) $77^{16}\cdot 14^{9}\cdot 22^{15}$ **(B)** $77^{9}\cdot 14^{16}\cdot 22^{25}$ **(C)** $77^{7}\cdot 14^{17}\cdot 22^{13}$
   (D) $77^{9}\cdot 14^{16}\cdot 22^{13}$ **(E)** $77^{9}\cdot 14^{12}\cdot 22^{16}$

5. Mira e Dino, compagni di banco, sono iscritti ai Giochi di Archimede. I 49 partecipanti, con un sorteggio, vengono sistemati 35 in un'aula e 14 in un'altra. Qual è la probabilità che Mira e Dino finiscano nella stessa aula?

   (A) 9/16 **(B)** 1/2 **(C)** 7/12 **(D)** 8/15 **(E)** 5/8

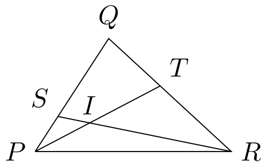
6. Consideriamo i numeri interi positivi n tali che n^6+3n^5 sia multiplo di 49. Supponendo di aver disposto tali valori n in ordine crescente, indicare la somma tra il 4° e il 7° di questi numeri.

   (A) 77 **(B)** 74 **(C)** 88 **(D)** 70 **(E)** 81

7. L'esagono $ABCDEF$ è circoscritto a una circonferenza. I suoi lati AB, BC, CD, EF misurano, rispettivamente, $27\,\mathrm{m}$, $25\,\mathrm{m}$, $19\,\mathrm{m}$, $29\,\mathrm{m}$. Qual è il perimetro dell'esagono?

   (A) $150\,\mathrm{m}$ **(B)** $146\,\mathrm{m}$ **(C)** $148\,\mathrm{m}$ **(D)** $152\,\mathrm{m}$ **(E)** $154\,\mathrm{m}$

8. Nel triangolo PQR, i punti S e T appartengono, nell'ordine, ai lati PQ e QR. Detto I il punto d'intersezione dei segmenti RS e PT, le aree dei triangoli PIR, RIT e SIP misurano rispettivamente $5\,\mathrm{mm}^2$, $10\,\mathrm{mm}^2$ e $1\,\mathrm{mm}^2$. Qual è l'area del triangolo PQR?



   (A) $36\,\mathrm{mm}^2$ **(B)** $30\,\mathrm{mm}^2$ **(C)** $24\,\mathrm{mm}^2$ **(D)** $27\,\mathrm{mm}^2$ **(E)** $32\,\mathrm{mm}^2$

9. Consideriamo i valori reali k tali che il polinomio $p(x)=x^2-(k+1)x+(3k+1)$ abbia una radice che è doppia dell'altra. Indicare la somma di tutti questi valori k.

   (A) 19/2 **(B)** 9 **(C)** 17/4 **(D)** 23/2 **(E)** 19/4

10. Emanuela scrive delle parole usando solo le lettere A e B, rispettando queste condizioni: ciascuna parola non può contenere nessuna delle sequenze di tre lettere consecutive AAA, BBB, ABB, BBA. Quante sono le parole di lunghezza infinita (ossia che proseguono illimitatamente verso destra) che Emanuela potrebbe scrivere?

    (A) 2 **(B)** 3 **(C)** nessuna **(D)** infinite **(E)** 4

11. In un parallelogramma $ABCD$ dove $\widehat{A}=76°$, siano M un punto sul lato AB e N un punto sul lato BC tali che $\overline{MC}=\overline{CD}$ e $\overline{DM}=\overline{MN}$. I punti C, D, M, N appartengono a una stessa circonferenza. Qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ADM}$?

    (A) 38° **(B)** 30° **(C)** 27° **(D)** 36° **(E)** 33°

12. La funzione a valori reali f soddisfa le uguaglianze $f(x)=f(2021-x)$ e $f(x+10)=f(2010-x)$, per qualsiasi numero reale x. Sapendo che $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=6$, qual è il valore di $f(16)+f(17)+f(18)$?

    (A) 18 **(B)** 8/3 **(C)** non si può stabilire **(D)** 9/2 **(E)** 18/5

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

311

1 dicembre 2022

- *La prova è costituita da 16 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*

- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*

- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 100 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

COGNOME ______________________ NOME ____________________

CLASSE e SEZ. ______ DATA DI NASCITA ______________

CONTATTO (cell. o mail) ______________________________________

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**

1. Dato un intero positivo n, quale tra i seguenti numeri differisce meno da $\left(n+\frac{3}{2}\right)^2$?

   (A) $(n+2)^2$ **(B)** $(n+1)^2$ **(C)** $(n+1)(n+2)$ **(D)** n^2+2 **(E)** $n^2+\frac{9}{4}$

2. ABC è un triangolo isoscele con $\overline{AC}=\overline{BC}$. Si scelgono due punti A', A'' sul lato AC e un punto B' sul lato BC in modo tale che $\overline{AB}=\overline{BA'}=\overline{A'B'}=\overline{B'A''}=\overline{A''C}$. Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$?

   (A) 18° **(B)** 15° **(C)** 24° **(D)** 20° **(E)** 30°

3. Gabriele nota che il numero 2022 si scrive con 3 cifre uguali e una quarta cifra differente dalle altre 3. Quanti sono in tutto i numeri naturali di 4 cifre che si scrivono con 3 cifre uguali e una quarta cifra differente dalle altre 3?

   (A) 324 **(B)** 315 **(C)** 243 **(D)** 216 **(E)** 288

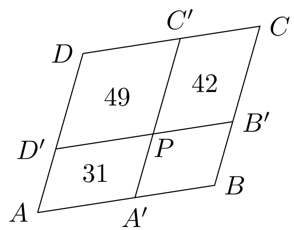
4. Il professore ha appena riportato i compiti corretti in una classe. La media di tutti i voti ricevuti è uguale a 6; il voto medio dei compiti che hanno preso almeno 6 è uguale a 7, mentre il voto medio degli altri è uguale a 4. Quale porzione della classe ha preso meno di 6?

   (A) 1/4 **(B)** 1/3 **(C)** 2/5 **(D)** 3/8 **(E)** 2/7

5. Laura dipinge di blu l'intera superficie di un cubo di legno, poi lo taglia suddividendolo in $6^3=216$ cubetti uguali. Mescolando i cubetti ed estraendone uno a caso, qual è la probabilità che Laura ne trovi uno che abbia esattamente due facce dipinte di blu?

   (A) 8/27 **(B)** 1/6 **(C)** 1/4 **(D)** 4/9 **(E)** 2/9

6. Considerato un parallelogramma $ABCD$, le rette parallele ai lati passanti per un punto interno P intersecano i lati in A', B', C' e D', come in figura. I perimetri (in metri) dei parallelogrammi $D'AA'P$, $C'DD'P$ e $B'CC'P$ sono quelli indicati in figura. Quanti metri misura il perimetro del parallelogramma $A'BB'P$?

   (A) 24 **(B)** 22 **(C)** 26 **(D)** 28 **(E)** 27

7. Quante sono le coppie di interi positivi (a,b) tali che a sia un divisore di b ed inoltre si abbia $a+2b=1010$?

   (A) 503 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 504

8. Esternamente a un triangolo isoscele ABC (con $\overline{AC}=\overline{BC}$), si costruisce un rombo $BCDE$, dove $C\widehat{D}E=96°$. Qual è l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}D$?

   (A) 54° **(B)** 36° **(C)** 42° **(D)** 48° **(E)** i dati forniti non sono sufficienti

9. Mentre pensa ad un problema di matematica, Francesco cammina come al solito avanti e indietro, facendo 1 passo in avanti, 2 indietro, 3 in avanti, 4 indietro e così via (con passi tutti di 60 cm). Appena raggiunge i 30 metri di distanza dal punto di partenza, finalmente risolve il problema. Quanti passi avrà fatto in tutto?

(A) 50 **(B)** 5150 **(C)** 1275 **(D)** 5050 **(E)** 4950

10. La tabella qui a fianco, con 7 colonne ed infinite righe che proseguono all'ingiù, viene riempita inserendo nelle caselle i numeri naturali, in ordine crescente, saltando tutti i multipli di 5. Con quale numero termina la 120-esima riga?

1	2	3	4	6	7	8
9	11	12	13	14	16	17

(A) 1049 **(B)** 1051 **(C)** 1052 **(D)** 839 **(E)** 841

11. Lungo la costa di un lago circolare ci sono tre porti. Su una mappa, i porti sono collocati in tre posizioni A, B, C e, misurando gli angoli, si trova che $C\widehat{A}B = 57°$, $A\widehat{B}C = 48°$, $B\widehat{C}A = 75°$. In caso di emergenza, i soccorsi all'interno del lago vengono prestati dal porto più vicino. Quale porzione del lago è assistita dal porto che deve soccorrere la superficie più estesa?

(A) 5/12 **(B)** 11/30 **(C)** 41/120 **(D)** 7/18 **(E)** 9/25

12. Quante sono le coppie ordinate di numeri naturali (m, n), con $m \leqslant n$, il cui minimo comune multiplo è uguale a 1515 ?

(A) 12 **(B)** 13 **(C)** 14 **(D)** 11 **(E)** 10

13. Alberto e Barbara hanno due sacchetti, che contengono rispettivamente 2022 e 9^{99} caramelle. In qualsiasi momento, uno dei due può mangiare una caramella dal proprio sacchetto (senza dover rispettare turni o criteri di alternanza), a condizione che, in tal caso, regali un'altra caramella all'altra persona, che la mette nel proprio sacchetto. Dopo un po' di tempo, nessuno dei due può più mangiare caramelle. Si può affermare che, a questo punto, ...

(A) sono rimasti entrambi senza caramelle
(B) Alberto ha una caramella, Barbara nessuna
(C) Barbara ha una caramella, Alberto nessuna
(D) hanno entrambi una caramella
(E) uno dei due (non si può prevedere chi) ha una caramella, l'altro nessuna

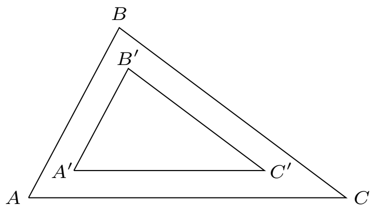
14. Indicare quanti sono i valori $k \in \mathbb{R}$ per i quali il polinomio $p(x) = x^2 - kx + 36$ ha almeno una radice intera positiva che sia minore di 1000.

(A) 3 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 999 **(E)** 995

15. Luca e Carlo giocano uno contro l'altro a tombola (senza altri avversari). Ciascuno ha una cartella con 15 numeri; le due cartelle non hanno numeri in comune. Qual è la probabilità che la partita si concluda proprio all'89-esimo numero estratto?

(A) 9/178 **(B)** 5/178 **(C)** 5/89 **(D)** 1/18 **(E)** 1/36

16. Nel triangolo acutangolo ABC, i lati AB e BC misurano 17 m e 25 m, l'altezza BH misura 15 m. Consideriamo il triangolo $A'B'C'$, contenuto in ABC, i cui lati sono paralleli a quelli di ABC e si trovano a 2 m di distanza da questi. Quanti m^2 misura l'area di $A'B'C'$?



(A) 315/2 **(B)** 280/3 **(C)** 140 **(D)** 105 **(E)** 126

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

311

30 novembre 2023

- *La prova è costituita da 16 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 100 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

COGNOME ______________________ NOME ______________________

CLASSE e SEZ. ________ DATA DI NASCITA ______________ SESSO ____

CONTATTO (cell. o mail) ____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1. Una sequenza di 6 numeri $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ è stata scelta in modo da avere $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = a_6 - a_5$. Sapendo che $a_1 + a_2 + a_3 = 11$ e $a_4 + a_5 + a_6 = 32$, indicare qual è il valore di $a_2 - a_1$.

   (A) $\frac{8}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** $\frac{7}{3}$ **(E)** $\frac{4}{3}$

2. Dati i numeri $x = 3^{(9^4)}$ e $y = 27^{(9^3)}$, consideriamo le 4 affermazioni seguenti:
   (1) x è un quadrato perfetto; (2) $x \cdot y$ è un quadrato e un cubo perfetto;
   (3) y è un quadrato perfetto; (4) x è un divisore di y.
   Tra le 4 affermazioni precedenti, quali sono vere?

   (A) la (4) **(B)** la (2) **(C)** la (1) e la (2) **(D)** tutte e 4 **(E)** nessuna

3. In un triangolo ABC, sia D un punto sul lato BC tale che $\overline{AC} = \overline{CD}$. Sapendo che $\overline{AD} = \overline{DB}$ e che l'angolo $\widehat{B}$ è 11 volte $\widehat{C}$, l'ampiezza dell'angolo $\widehat{A}$ è ...

   (A) $128°$ **(B)** $129°$ **(C)** $131°$ **(D)** $130°$ **(E)** $132°$

4. Quante volte, nell'arco di una giornata (da mezzanotte alla mezzanotte successiva), la lancetta delle ore e la lancetta dei minuti di un orologio (con un comune quadrante a 12 ore) si trovano disposte perpendicolarmente?

   (A) 44 **(B)** 48 **(C)** 24 **(D)** 22 **(E)** 46

5. Barbara vuole riordinare uno scaffale della sua libreria, dove ci sono 2 quaderni verdi, 3 blu, 2 gialli e 1 rosso. Li vuole disporre in modo che i quaderni dello stesso colore stiano tutti vicini tra loro, senza altri colori in mezzo. In quanti modi Barbara può disporre in fila, da sinistra verso destra, i suoi 8 quaderni sullo scaffale?

   (A) 360 **(B)** 144 **(C)** 432 **(D)** 96 **(E)** 576

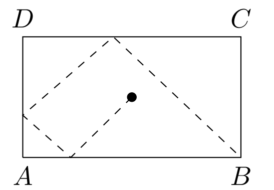
6. Si sa che $a < b < c < d$ sono numeri reali diversi da 0 e che $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$.
   Quale delle seguenti quantità è sicuramente positiva?

   (A) $-a - 2b - 4c + 3d$
   (B) $2a - b + 3c + 2d$
   (C) $-2a - 3b - c + 2d$
   (D) $-a + 3b + 4c + 5d$
   (E) $a + 2b + 3c + 4d$

7. In un'isola, ciascun abitante può essere un cavaliere, che dice sempre il vero, oppure un furfante, che mente sempre, oppure un paggio, libero di mentire o dire il vero. Per le leggi dell'isola, se più di 10 persone si riuniscono, fra loro dev'esserci almeno un cavaliere. Un giorno, 301 abitanti sono disposti in cerchio ed ognuno esclama: "vicino a me ci sono un cavaliere ed un furfante". Quanti sono, come minimo, i paggi fra le 301 persone in cerchio?

   (A) 4 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 2 **(E)** 1

8. Francesco gioca su un biliardo di dimensioni $280 \times 140\,\text{cm}$. La palla si trova nel centro del biliardo e Francesco la vuole mandare in buca nell'angolo B con una traiettoria come quella tracciata in figura (la palla rimbalza formando angoli uguali con ciascuna sponda). A quanti cm di distanza da A occorre colpire la sponda AB per realizzare la traiettoria?



   (A) 56 **(B)** 64 **(C)** 63 **(D)** 70 **(E)** 42

9. Indicare quante sono le sequenze ordinate di 5 numeri interi (a, b, c, d, e) tali che $a\,b\,c\,d\,e + 15 = 0$.

(A) 375 **(B)** 400 **(C)** 125 **(D)** 320 **(E)** 250

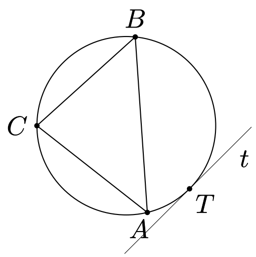
10. Gabriele ha una striscia di carta quadrettata, con quadretti di lato 1 centimetro, lunga 2023 cm. Vuole segnare ogni tacca dei centimetri, da 0 fino a 2023, con uno dei suoi 4 pennarelli colorati (rosso, giallo, verde e blu). Farà in modo che i multipli di 4, incluso 0, siano tutti segnati di blu e che non ci siano tacche vicine dello stesso colore. In quanti diversi modi Gabriele potrà realizzare la colorazione?

(A) $27 \cdot 21^{505}$ **(B)** $27 \cdot 25^{505}$ **(C)** $27 \cdot 16^{505}$ **(D)** $27 \cdot 18^{505}$ **(E)** $27 \cdot 36^{505}$

11. Tommaso e Claudia si sfidano lanciando varie volte una moneta: ogni volta che esce testa fa un punto Tommaso, quando esce croce fa un punto Claudia. Appena uno dei due arriva a 4, la partita finisce. Qual è la probabilità che la partita termini sul punteggio di 4 a 2 (per uno qualsiasi dei due)?

(A) 15/32 **(B)** 11/32 **(C)** 25/64 **(D)** 3/8 **(E)** 5/16

12. Nel triangolo ABC, gli angoli hanno queste ampiezze: $\widehat{A} = 52°$, $\widehat{B} = 57°$, $\widehat{C} = 71°$. La retta t, parallela al lato BC, è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo in un punto T dell'arco $\widehat{AB}$.
Qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ACT}$?



(A) 6° **(B)** 8° **(C)** 7° **(D)** 10° **(E)** 9°

13. Una tartaruga fa ogni tanto una passeggiata, partendo dalla propria tana. La passaggiata è formata da tratti rettilinei di un metro, ogni volta in una direzione a caso tra Nord, Sud, Ovest, Est. Qual è la probabilità che, dopo una passeggiata di 6 metri, la tartaruga si trovi di nuovo nella tana?

(A) 1/8 **(B)** 13/128 **(C)** 9/64 **(D)** 9/128 **(E)** 25/256

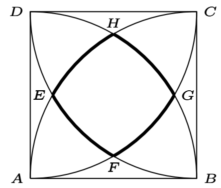
14. Considerato un poligono regolare $\mathcal{P}$ di 21 lati, stabilire quanti sono i triangoli non scaleni che si possono costruire usando tre vertici del poligono $\mathcal{P}$.

(A) 210 **(B)** 231 **(C)** 196 **(D)** 189 **(E)** 203

15. Dopo aver disegnato un rettangolo di dimensioni 78×114 cm, Chiara lo suddivide in $78 \cdot 114 = 8892$ quadratini di 1 cm^2, poi traccia una diagonale del rettangolo. Quanti quadratini vengono attraversati dalla diagonale?

(A) 114 **(B)** 186 **(C)** 191 **(D)** 162 **(E)** 192

16. Il quadrato $ABCD$ ha lato pari a 1 dm. Quanti dm^2 misura l'area del quadrilatero curvilineo $EFGH$, delimitato dagli archi di 4 circonferenze i cui centri sono i vertici di $ABCD$?



(A) $\frac{3\pi-\sqrt{3}}{16}$ **(B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(D)** $1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ **(E)** $2-\sqrt{3}$